

PRESSEK

#1

MATEMATIKA • FIZIKA • ASTRONOMIJA • RAČUNALNIŠTVO



DVAKRATNIK
TRIKOTNIŠKEGA
ŠTEVILA

KROŽNICA IN
ELASTIKA

GLOBINSKA
OSTRINA PRI
MIKROSKOPU

OLIMPIJADA IZ
ASTRONOMIJE
IN ASTROFIZIKE

Si umetna inteligenca že zasluži zlato medaljo matematične olimpijade?

↓↓↓

Neverjetno hiter razvoj umetne inteligence prete-
sa tudi matematični svet. Pred enim letom smo v
tej rubriki poročali o novici, da sta specializirana
programa AlphaProof in AlphaGeometry z rešitvijo
4 od skupaj 6 nalog Mednarodne matematične olim-
pijade 2024 zbrala dovolj točk za srebrno medaljo.
Letos so programerji podjetja Google Deep Mind na-
redili še korak naprej in njihova najnovejša program-
ska oprema Gemini Deep Think je v štirih urah in pol
rešila 5 od 6 nalog letošnje MMO. To bi zadoščalo za
zlato medaljo, ki jo sicer na tekmovanju prejme okoli
8 odstotkov tekmovalcev.

Kot je povedal predsednik odbora MMO 2025, slo-
venski matematik dr. Gregor Dolinar, so z računalni-
kom pridobljene rešitve preverili tudi uradni ocenje-
valci letošnje olimpijade v Sydneyju, ki so bili navdu-
šeni nad njihovo preglednostjo in natančnostjo. Izje-
men napredek predstavlja tudi to, da so lansko leto
besedilo nalog računalniku podali v formalni obliki,
ki so jo pripravili človeški prevajalci, letos pa se je
računalnik spopadel kar z nalogami v naravnem je-
ziku, kot so jih prejeli tekmovalci.

Raziskovalca Thang Luong in Edward Lockhart na
svoji spletni strani pojasnjujeta, da uporabljena pro-
gramska oprema zdaj omogoča vzporedno razmi-
šljanje, s katerim učinkoviteje proučuje različne mož-
ne poti do rešitve. Obenem so umetno inteligenco
trenirali z okrepljenimi tehnikami učenja, ki bolje iz-
koristijo podatke o reševanju problemov in dokazo-
vanju izrekov, in ji omogočili dostop do zbirke izbra-
nih visokokakovostnih rešitev matematičnih proble-
mov. Avtorja verjameta, da bo umetna inteligenca s
tovrstnim napredkom v bližnji prihodnosti pomem-
bno prispevala k razvoju matematike in omogočila
učinkovitejše delo vsem strokovnjakom, ki jo potre-
bujejo pri svojem delu. Več o tem si lahko preberete
na spletnem naslovu <https://deepmind.google/discover/>, julij 2025.

× × ×

→

Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 53, šolsko leto 2025/2026, številka 1

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Nino Bašič (računalništvo),
Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domajnko, Andrej Guštin
(astronomija), Maja Klavžar, Damjan Kobal, Vid Kavčič, Lucijana
Kračun Berc (tekmovanja), Boštjan Kuzman (matematika), Peter
Legiša, Tadej Starčič, Aleksander Simonič, Andrej Likar (fizika),
Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Marko Razpet,
Grega Rihtar (jezikovni pregled), Matjaž Vencelj, Matjaž
Zaveršnik.

Dopisi in naročnine: Fakulteta za matematiko in fiziko, Presek,
Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana, telefon (01) 4766 558.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: zalozba@fmf.uni-lj.si

Naročnina za šolsko leto 2025/2026 je za posamezne
naročnike 25,00 EUR - posamezno naročilo velja do preklica, za
skupinska naročila učencev šol 22,00 EUR, posamezna številka
6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa
znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 01100-6030708962.

List sofinancira Javna agencija za znanstvenoraziskovalno in
inovacijsko dejavnost Republike Slovenije iz sredstev
državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje
domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založila Fakulteta za matematiko in fiziko

Oblikovanje Lucia Jamnik

Tisk Birografika Bori, Ljubljana

Naklada 900 izvodov

© 2025 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
in Fakulteta za matematiko in fiziko

ISSN 2630-4317 (Online), ISSN 0351-6652 (Tiskana izd.)

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov
brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike,
fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Pri-
kaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in
srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj
bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem viš-
jih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež
institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo ošte-
vilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma
razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo
biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps ...), velikosti vsaj 8 cm pri
ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno
pomajša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike
iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (co-
pyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsti-
cami pa vsaj 18 pt. Prispevke pošljite odgovornemu uredniku
na naslov uredništva **Fakulteta za matematiko in fiziko, Presek,**
Jadranska 19, 1000 Ljubljana ali na naslov elektronske pošte
zalozba@fmf.uni-lj.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu re-
cenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek
sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, po-
tem uredništvo prosi avtorja za izvirne datoteke. Le-te naj bodo
praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov
TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo ob-
javo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

MATEMATIČNI TRENUTEK

- 2 Si umetna inteligenca že zasluži zlato medaljo matematične olimpijade?

UVODNIK

- 4 Zvezdn(išk)o poletje
(Aleš Mohorič)

MATEMATIKA

- 5-8 Dvakratnik trikotniškega števila je lahko trikotniško število
(Marko Razpet)
- 9-11 Krožnica in elastika
(Ivan Lisac)

TEKMOVANJA

- 12-15 Mednarodna matematična olimpijada 2025 v Avstraliji
(Patricia Király, Žiga Oštir)

FIZIKA

- 18-23 Globinska ostrina pri mikroskopu
(Andrej Likar)

ASTRONOMIJA

- 24-29 Jubilejna 10. srednjeevropska olimpijada iz astronomije in astrofizike
(Vid Kavčič)

RAZVEDRILO

- 16-17 Nagradna križanka
(Marko Bokalič)
- 30 Bilo je nekoč: Poročilo o velikem vseslovenskem verižnem eksperimentu, Presek letnik 33, številka 1

SLIKA NA NASLOVNICI: Kapljice poletne nevihte padajo na tanko plast vode in ustvarijo kratkotrajne strukture, katerih oblika in velikost je odvisna od mnogih faktorjev - viskoznosti vode, velikosti in hitrosti kapljic, debeline vodne plasti na podlagi in še bi se kaj našlo. Fotografija: Andrej Guštin

Zvezdn(išk)o poletje

↓↓↓

ALEŠ MOHORIČ, ODGOVORNI UREDNIK

Letošnje poletje končujemo in nov letnik Preseka začnemo s čudovitimi novicami o velikih uspehih naših mladih tekmovalcev v znanju. Na letošnji mednarodni olimpijadi iz astronomije in astrofizike v Mumbaju so slovenski tekmovalci Žan Arsov, Primož Markovič in Aljaž Erman osvojili tri zlate medalje, srebrno medaljo je prejel Žiga Vučajnik, bronasto pa Nika Videnšek Podgorelec. V Parizu je na mednarodni fizikalni olimpijadi Aljaž Erman potrdil vrhunsko formo z zlato medaljo, Enej Jauk in Primož Markovič sta osvojila srebro, Svit Miklavčič pa bron. Na ekonomski olimpijadi v Bakuju sta bronasti medalji pripadli Marku Iztoku Lunderju in Matiji Laknerju, Nika Videnšek Podgorelec pa je prejela pohvalo za odličen nastop. Na mednarodni matematični olimpijadi na Sunshine Coastu v Avstraliji sta bronasti medalji domov prinesla Žiga Oštir in Patricia Király, priznanja za izjemno reševanje nalog pa so prejeli Taras Vuk, Ekaterina Chizhova, Nace Hranjec in Andraž Čadež. Na jubilejni 10. srednjeevropski olimpijadi iz astronomije in astrofizike v Avberju na Krasu sta si Žan Arsov in Primož Markovič prislužila zlati medalji, srebro so osvojili Niko Habinc, Anže Jakovac in Žiga Vučajnik, bron pa Blaž Gašperlin in Nika Videnšek Podgorelec, pohvalo je prejela Nika Arsov. Ti izjemni rezultati dokazujejo zavezo mladih tekmovalcev, kakovostne priprave pod okriljem Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije in napovedujejo še močnejšo slovensko prisotnost na prihodnjih mednarodnih znanstvenih tekmovanjih. Uspehi mladih astronomov sovpadajo z velikim napredkom astronomije. Teleskop Vera C. Rubin je letos na Cerro Pachónu v Čilu ujel prve fotone. Opremljen je z izjemno ločljivo kamero in zrcalnim sistemom, ki mu omogoča, da dvakrat na teden preišče celotno nočno nebo južne poloble. Zbrani podatki bodo astronomom omogočili podrobno spremljanje gibanja galaksij, odkrivanje svetlobnih prehodnih pojavov v vesolju in poglobljeno raziskovanje temne snovi ter temne energije. V prihodnjih letih bo Rubin Observatory dopolnil delo velikih ve-

soljskih teleskopov, kot je James Webb. Rubin bo identificiral in spremljal prehodne dogodke, Webb pa bo lahko nato vanje pogledal z izjemno ločljivostjo in infrardečim vidom. Opozoril bi še na eno (za letos sicer žal že zamujeno) priložnost sodelovanja na poletni šoli, na kateri lahko dijaki izveste veliko novega in zanimivega s področij fizike in matematike (povezava <https://www.fmf.uni-lj.si/sl/obvestila/obvestilo/37601/poletna-sola-ul-fmf-za-dijakinje-in-dijake/>).

Ker jo Fakulteta za matematiko in fiziko organizira vsako leto, bodite pozorni na vabilo za prihodnjič.



SLIKA 1.

Observatorij Vera C. Rubin z odprto kupolo aprila 2025. Nad teleskopom je vidna kopica M 41.

Vir: RubinObs/NOIRLab/SLAC/NSF/DOE/AURA/P. Horálek (Fizikalni inštitut v Opavi)

× × ×

Dvakratnik trikotniškega števila je lahko trikotniško število

↓↓↓

MARKO RAZPET

→ Ob študiju trikotniških števil se nam slej ko prej zastavi problem, ali je lahko dvakratnik trikotniškega števila prav tako trikotniško število. V prispevku bomo pokazali, da za nekatera trikotniška števila to drži in da ima problem celo nešteto rešitev, ki jih najdemo z reševanjem ustreznih Pellovih enačb.

Trikotniška števila dobimo, če seštejemo nekaj zaporednih naravnih števil od 1 dalje, na primer $1 + 2 = 3$, $1 + 2 + 3 = 6$, $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Mednje štejeemo tudi število 1, čeprav nismo pri tem ničesar sešteli. Trikotniška števila označujemo s črko T , ki ji dodamo indeks n , ki pove, katero trikotniško število po vrsti imamo v mislih in koliko zaporednih naravnih števil je potrebno za to sešteti. To se pravi

$$\blacksquare T_n = 1 + 2 + \dots + (n - 1) + n. \quad (1)$$

Očitno velja preprosta rekurzivna zveza

$$\blacksquare T_{n+1} = T_n + (n + 1), \quad (2)$$

iz katere dobimo zaporedje trikotniških števil:

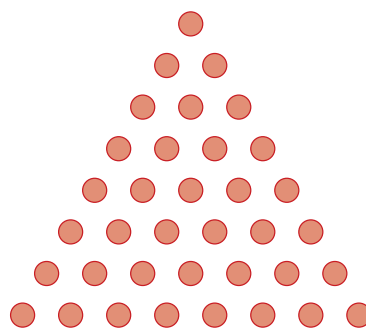
$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, \dots$$

Da pa nam ne bi bilo treba toliko seštevati, da bi prišli na primer do stotega trikotniškega števila, razvijmo kratko formulo za T_n . V ta namen zapišemo v (1) seštevance v obratnem vrstnem redu:

$$\blacksquare T_n = n + (n - 1) + \dots + 2 + 1. \quad (3)$$

Nato enačbi (1) in (3) seštejemo:

$$2T_n = (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) = n(n+1).$$



SLIKA 1.

Trikotniško število $T_8 = 36$.

S tem imamo formulo:

$$\blacksquare T_n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (4)$$

Brez težav z njo izračunamo na primer $T_{100} = 100 \cdot 101/2 = 5050$.

Števila T_n so trikotniška zato, ker lahko iz T_n enakih predmetov, na primer krožcev, sestavimo trikotno figuro z n vrsticami. V njeni spodnji vrstici je n krožcev, ki ji sledi vrstica z $n - 1$ krožcem in tako naprej, v vsaki višji vrstici je po en krožec manj, v predzadnji vrstici sta dva krožca, v zadnji pa en sam. Slika 1 ponazarja trikotniško število $T_8 = 36$.

Sedaj nas zanima, kdaj je dvakratnik trikotniškega števila tudi trikotniško število. En primer je na dlani:



→ $2T_2 = T_3$. S poskušanjem najdemo še primer $2T_{14} = T_{20}$. Toda poskušanje ne vodi nikamor. Radi bi imeli postopek, ki nam da vse take primere. To se pravi, postopek, ki nam bo dal vsa naravna števila m in n , za katere je

$$\blacksquare 2T_m = T_n, \quad (5)$$

iz česar sledi enačba z dvema neznankama

$$\blacksquare m(m+1) = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (6)$$

Pomnožimo jo na obeh straneh z 8 in dobimo:

$$\blacksquare 4n(n+1) = 2 \cdot 4m(m+1). \quad (7)$$

Nato zapišemo

$$\blacksquare \begin{aligned} 4n(n+1) &= 4n^2 + 4n = (2n+1)^2 - 1, \\ 4m(m+1) &= 4m^2 + 4m = (2m+1)^2 - 1 \end{aligned}$$

in enačba (7) preide v enačbo

$$\blacksquare (2n+1)^2 - 1 = 2(2m+1)^2 - 2.$$

Uvedemo novi neznanki $u = 2n+1$, $v = 2m+1$, ki sta lihi števili, in dobimo

$$\blacksquare u^2 - 2v^2 = -1, \quad (8)$$

kar je poseben primer diofantske enačbe druge stopnje z dvema neznankama. Na splošno je enačba $f(x, y) = 0$ diofantska stopnje n , če je f polinom stopnje n s celimi koeficienti. Zanimajo pa nas rešitve (x, y) , kjer sta x in y celi števili. Take rešitve obstajajo ali pa tudi ne.

Diofantsko enačbo

$$\blacksquare x^2 - Dy^2 = 1,$$

kjer koeficient D ni kvadrat kakega naravnega števila, imenujemo *Pellova enačba*. Taka enačba ima neskončno mnogo rešitev v naravnih številih.

Splošna Pellova enačba ima obliko

$$\blacksquare x^2 - Dy^2 = c,$$

kjer D ni kvadrat kakega naravnega števila, pri tem pa je c celo, od 0 in 1 različno število. Enačbi

$$\blacksquare x^2 - Dy^2 = -1,$$

rečemo negativna Pellova enačba. Izkaže se, da ima splošna Pellova enačba nešteto rešitev v naravnih številih, kakor hitro premore eno tako rešitev. Več o Pellovi enačbi najdemo na primer v [1,2].

Da bi rešili naš problem s trikotniškimi števili, moramo obravnavati negativno Pellovo enačbo (8) skupaj s Pellovo enačbo

$$\blacksquare x^2 - 2y^2 = 1, \quad (9)$$

ki ima očitno trivialno rešitev $(x_0, y_0) = (1, 0)$ in rešitev $(x_1, y_1) = (3, 2)$, ki ji pravimo osnovna rešitev enačbe (9).

Oglejmo si množico Q števil $a + b\sqrt{2}$, kjer sta a in b celi števili. V tej množici velja enakost $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ natanko takrat, ko je $a = c$ in $b = d$. Če bi namreč veljalo $b \neq d$, bi imeli

$$\blacksquare \frac{a-c}{d-b} = \sqrt{2},$$

kar pa je nemogoče, ker $\sqrt{2}$ ni racionalno število. Zato mora veljati $a = c$ in $b = d$. Poleg tega pa je množica Q zaprta za seštevanje, odštevanje in množenje.

Iz osnovne rešitve Pellove enačbe (9) sestavimo število $x_1 + y_1\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2}$. Njegov kvadrat je število $x_2 + y_2\sqrt{2} = (x_1 + y_1\sqrt{2})^2 = (3 + 2\sqrt{2})^2 = 17 + 12\sqrt{2}$. Ni se težko prepričati, da je $(x_2, y_2) = (17, 12)$ rešitev enačbe (9). Nato nadaljujemo z

$$\blacksquare \begin{aligned} x_3 + y_3\sqrt{2} &= (x_1 + y_1\sqrt{2})^3 \\ &= (3 + 2\sqrt{2})(17 + 12\sqrt{2}) \\ &= 99 + 70\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Tudi $(x_3, y_3) = (99, 70)$ je rešitev Pellove enačbe (9).

Postopek iskanja nadaljujemo tako, da najprej izrazimo

$$\blacksquare \begin{aligned} x_{k+1} + y_{k+1}\sqrt{2} &= (3 + 2\sqrt{2})(x_k + y_k\sqrt{2}) \\ &= (3x_k + 4y_k) + (2x_k + 3y_k)\sqrt{2}, \end{aligned}$$

od koder sledita rekurzivni zvezi

$$\blacksquare x_{k+1} = 3x_k + 4y_k, \quad (10)$$

$$y_{k+1} = 2x_k + 3y_k \quad (11)$$

pri začetnem pogoju $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

Z metodo matematične indukcije glede na k zlahka dokažemo, da so vsi pari (x_k, y_k) rešitve Pellove

enačbe (9). V [1,2] je dokazano, da s tem dobimo vse njene rešitve v naravnih številih.

Negativna Pellova enačba (8) ima za najmanjšo rešitev par $(u_0, v_0) = (1, 1)$. Z njim sestavimo število

$$u_0 + v_0\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}$$

in

$$\begin{aligned} u_1 + v_1\sqrt{2} &= (u_0 + v_0\sqrt{2})(x_1 + y_1\sqrt{2}) \\ &= (1 + \sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) = 7 + 5\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Par $(u_1, v_1) = (7, 5)$ zadošča enačbi (8) in nam da za iskani trikotniški števili $n_1 = (u_1 - 1)/2 = 3, m_1 = (v_1 - 1)/2 = 2$, kar smo na samem začetku že uganili in zapisali $2T_2 = T_3$.

Opogumljeni s tem rezultatom poskusimo še z

$$\begin{aligned} u_2 + v_2\sqrt{2} &= (u_0 + v_0\sqrt{2})(x_2 + y_2\sqrt{2}) \\ &= (1 + \sqrt{2})(17 + 12\sqrt{2}) = 41 + 29\sqrt{2}, \end{aligned}$$

kar nam da par $(u_2, v_2) = (41, 29)$ in $n_2 = (u_2 - 1)/2 = 20, m_2 = (v_2 - 1)/2 = 14$, kar smo že omenili na začetku, ko smo zapisali $2T_{14} = T_{20}$.

Prav tako najdemo naslednjo rešitev:

$$\begin{aligned} u_3 + v_3\sqrt{2} &= (u_0 + v_0\sqrt{2})(x_3 + y_3\sqrt{2}) \\ &= (1 + \sqrt{2})(99 + 70\sqrt{2}) \\ &= 239 + 169\sqrt{2}, \end{aligned}$$

kar nam da par $(u_3, v_3) = (239, 169)$ in $n_3 = (u_3 - 1)/2 = 119, m_3 = (v_3 - 1)/2 = 84$.

V [1] je dokazano, da vse rešitve enačbe (8) najdemo z nastavkom

$$\begin{aligned} u_k + v_k\sqrt{2} &= (u_0 + v_0\sqrt{2})(x_k + y_k\sqrt{2}) \\ &= (1 + \sqrt{2})(x_k + y_k\sqrt{2}), \end{aligned}$$

iz katerega sledita enačbi

$$\begin{aligned} u_k &= x_k + 2y_k, \\ v_k &= x_k + y_k. \end{aligned}$$

Preverimo, da par (u_k, v_k) zadošča negativni Pellovi enačbi:

$$\begin{aligned} u_k^2 - 2v_k^2 &= (x_k + 2y_k)^2 - 2(x_k + y_k)^2 \\ &= x_k^2 + 4x_ky_k + 4y_k^2 - \\ &\quad - 2(x_k^2 + 2x_ky_k + y_k^2) \\ &= -(x_k^2 - 2y_k^2) = -1. \end{aligned}$$

Iz razvoja

$$\begin{aligned} u_{k+1} + v_{k+1}\sqrt{2} &= (1 + \sqrt{2})(x_{k+1} + y_{k+1}\sqrt{2}) \\ &= (1 + \sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})(x_k + y_k\sqrt{2}) \\ &= (3 + 2\sqrt{2})(u_k + v_k\sqrt{2}) \end{aligned}$$

dobimo rekurzivni zvezi

$$u_{k+1} = 3u_k + 4v_k, \quad (12)$$

$$v_{k+1} = 2u_k + 3v_k \quad (13)$$

pri začetnem pogoju $(u_0, v_0) = (1, 1)$.

Z metodo matematične indukcije iz (12) in (13) takoj spoznamo, da so števila u_k in v_k liha, tako da so števila $n_k = (u_k - 1)/2$ in $m_k = (v_k - 1)/2$ naravna, kar je potrebno za indekse trikotniških števil. Na ta način dobimo neskončno zaporedje parov (m_k, n_k) , za katere velja $2T_{m_k} = T_{n_k}$.

Iz (12) in (13) izpeljemo še homogeni diferenčni enačbi drugega reda za u_k in v_k . Iz (12) in (13) dobimo:

$$\begin{aligned} u_{k+2} &= 3u_{k+1} + 4v_{k+1} = 3u_{k+1} + 4(2u_k + 3v_k) \\ &= 3u_{k+1} + 8u_k + 3 \cdot 4v_k \\ &= 3u_{k+1} + 8u_k + 3(u_{k+1} - 3u_k) \\ &= 6u_{k+1} - u_k. \end{aligned}$$

Tudi za v_k dobimo podobno: $v_{k+2} = 6v_{k+1} - v_k$. Iskani diferenčni enačbi in začetni pogoji so:

$$\begin{aligned} u_{k+2} - 6u_{k+1} + u_k &= 0, \quad u_0 = 1, u_1 = 7; \\ v_{k+2} - 6v_{k+1} + v_k &= 0, \quad v_0 = 1, v_1 = 5. \end{aligned}$$

Z metodo, ki je opisana v [4], najdemo zaključeni formuli:

$$\begin{aligned} u_k &= \frac{1}{2} \left((1 + \sqrt{2})^{2k+1} + (1 - \sqrt{2})^{2k+1} \right), \\ v_k &= \frac{1}{4} \left((2 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})^{2k} + (2 - \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})^{2k} \right) \end{aligned}$$

Nato izračunamo števila $m_k = (v_k - 1)/2$ in $n_k = (u_k - 1)/2$, za katera je $2T_{m_k} = T_{n_k}$.



→ Na podlagi vsega zapisanega lahko sestavimo tabelo 1.

Trikotnik krožcev, ki predstavlja trikotniško število T_{n_k} , lahko zato razdelimo na trikotnik s T_{m_k} krožci in trapez s prav toliko krožci (slika 2).

V več člankih V. Pletser, na primer v [3], obširno obravnava splošen problem, kdaj je $kT_m = T_n$ za naravna števila $k \geq 2$.

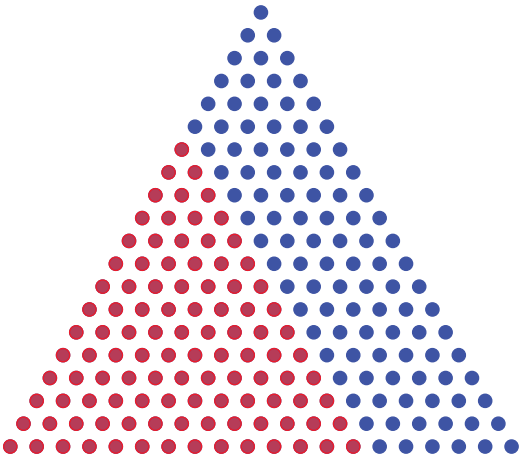
Literatura

[1] A. Dujella, *Number theory*, Školska knjiga, Zagreb 2021.

[2] J. Grasselli, *Diofantske enačbe*, DMFA, Ljubljana 1984.

[3] V. Pletser, *Triangular numbers multiple of triangular numbers and solutions of Pell equations*, arXiv:2102.13494v2 [math.NT] 21 Apr 2021.

[4] A. Vadnal, *Osnove diferenčnega računa*, DZS, Ljubljana 1979.



SLIKA 2.
Trikotniški števili $T_{14} = 105$ in $T_{20} = 210$.

k	m_k	n_k	T_{m_k}	T_{n_k}
1	2	3	3	6
2	14	20	105	210
3	84	119	3570	7140
4	492	696	121278	242556
5	2870	4059	4119885	8239770
6	16730	23660	139954815	279909630
7	97512	137903	4754343828	9508687656
8	568344	803760	161507735340	323015470680
9	3312554	4684659	5486508657735	10973017315470
10	19306982	27304196	186379786627653	372759573255306

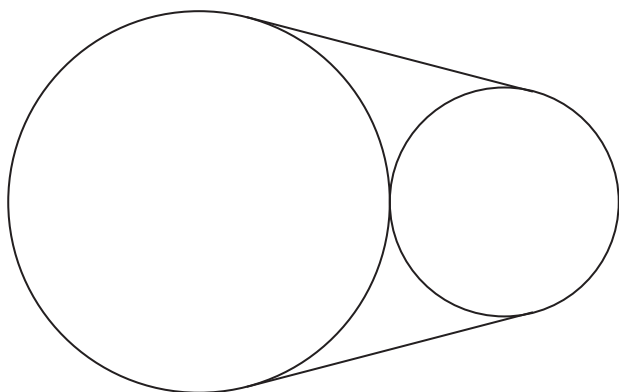
TABELA 1.

Krožnica in elastika

↓↓↓

IVAN LISAC

→ Izkušnja pove, da se elastika lepo ovije okoli krožnih predmetov. Včasih ovijemo več valjastih svinčnikov v kup, jeklarji vežejo okrogle palice s trakovi v vezi, mi pa pogledjmo, kako se da oviti elastiko okoli nekaj krožnic.



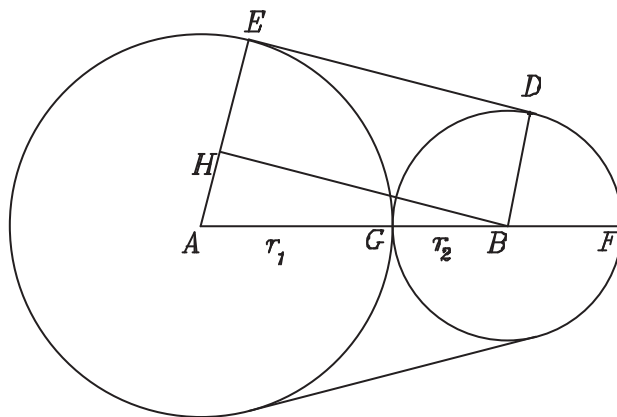
SLIKA 1.

Dve krožnici, oviti z elastiko.

Dve krožnici in elastika

Dani sta dve krožnici s polmeroma r_1 in r_2 kot kaže slika 2. Poskusimo izračunati dolžino L raztegljive prožne elastike, ki objame obe med seboj dotikajoči se krožnici. Naj bo $r_1 \geq r_2 > 0$.

Ravni del elastike DE leži na dotikalnici obeh krožnic. Poskusimo izračunati dolžino te daljice.



SLIKA 2.

Koliko meri DE ?

Kota pri točkah D in E sta prava, saj skupna dotikalnica krožnic DE tvori pravi kot s polmeroma AE in BD . Daljica BH naj bo vzporedno premaknjena slika daljice DE , tako da točka D preide v točko B , točka E pa v točko H . Trikotnik ABH ima pravi kot pri oglišču H , njegova hipotenuza AB meri $r_1 + r_2$, kateta AH pa $r_1 - r_2$. Kateta BH zadošča Pitagorovemu izreku:

$$BH^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4r_1r_2,$$

iz česar sledi $DE = 2\sqrt{r_1r_2}$, kar smo hoteli izračunati.

Poskusimo izračunati še dolžino loka FD . Iz trikotnika ABH izračunamo sinus kota pri točki A :

$$BH : BA = 2\sqrt{r_1r_2} / (r_1 + r_2) = \frac{G(r_1, r_2)}{A(r_1, r_2)},$$

kjer smo označili z $G = G(r_1, r_2) = G_{12} = \sqrt{r_1r_2}$ geometrijsko, z $A = A(r_1, r_2) = A_{12} = (r_1 + r_2)/2$ pa aritmetično sredino obeh polmerov. Lok FD meri



torej $r_2 \arcsin(G/A)$, lok GE pa zaradi skladnih kotov FBD in GAE podobno $r_1 \arcsin(G/A)$.

Tako. Sedaj lahko izračunamo dolžino elastike L (upoštevaje simetrijo prek osi AF) kot dvakratno vsoto loka FD , dvakratno vsoto suplementarnega loka k loku GE in dvakratno vsoto dotikalnice DE , kar zneso (upoštevaje $r_1 \geq r_2$)

$$\blacksquare L = 2\pi r_1 + 4G - 2(r_1 - r_2) \arcsin(G/A).$$

Izračunamo lahko še različico te formule. Kosinus kota pri točki A meri $(r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)$, dolžina elastike pa je po podobnem premisleku

$$\blacksquare L = 2\pi r_1 + 4G - 2(r_1 - r_2) \arccos\left(\frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}\right).$$

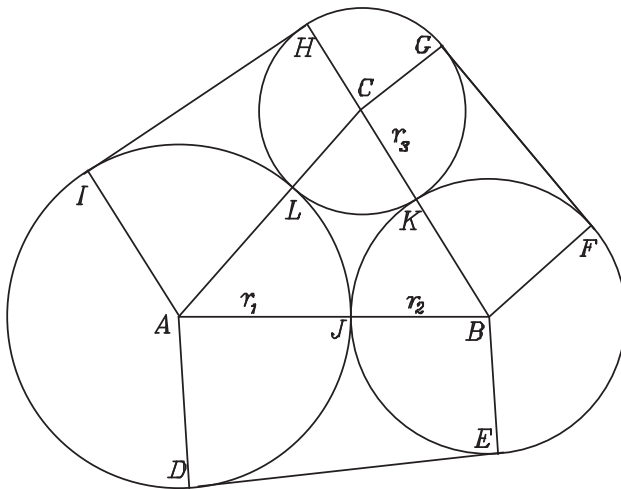
Za posebni primer $r_1 = r_2 = r$ dobimo

$$\blacksquare L = (2\pi + 4)r.$$

Tri krožnice in elastika

Vzemimo sedaj tri paroma dotikajoče se krožnice, kot na sliki 3, in poskusimo izračunati dolžino elastike sedaj. Privzemimo $r_1 \geq r_2 \geq r_3 > 0$.

Najprej izračunajmo dolžino loka ID . Šli bomo preko izračuna kotov DAJ , JAL , LAI in IAD , ki skupaj tvorijo polni kot.



SLIKA 3.

Koliko meri lok ID ?

Kot DAJ nastopa v trapezu $ABED$ na sliki 3 podobno, kot je nastopal kot pri točki A v trapezu $ABDE$ na sliki 2, tako da imamo po analogiji

$$\blacksquare DE : AB = G_{12} : A_{12}.$$

Kot JAL nastopa v trikotniku ABC s stranicami $r_1 + r_2$, $r_2 + r_3$ in $r_3 + r_1$. Označimo $c = \cos(JAL)$ in zapišimo kosinusni izrek za kotu nasprotno stranico:

$$\blacksquare (r_2 + r_3)^2 = (r_1 + r_2)^2 + (r_1 + r_3)^2 - 2(r_1 + r_2)(r_1 + r_3)c.$$

Kvadrata polmerov r_2 in r_3 se na levi in desni strani izničita:

$$\blacksquare 2r_2r_3 = 2r_1^2 + 2r_1r_2 + 2r_1r_3 - 2(r_1 + r_2)(r_1 + r_3)c.$$

Od tu dobimo

$$\blacksquare c = \frac{r_1s - r_2r_3}{r_1s + r_2r_3},$$

kjer smo uvedli $s = r_1 + r_2 + r_3$.

Sinus kota LAI dobimo po analogiji s kotom DAB :

$$\blacksquare HI : AC = G_{13} : A_{13}$$

Kot IAD pa skupaj s temi tremi koti sestavlja polni kot. Sedaj lahko zapišemo dolžino loka ID :

$$\blacksquare r_1 \left(2\pi - \arcsin\left(\frac{G_{12}}{A_{12}}\right) - \arcsin\left(\frac{G_{13}}{A_{13}}\right) - \arccos\left(\frac{r_1s - r_2r_3}{r_1s + r_2r_3}\right) \right).$$

Sedaj pa le še pripravimo oznake za končno formulo dolžine elastike L za primer treh dotikajočih se krožnic (v lepi legi kot npr. na sliki 3). Naj bo

$$\blacksquare S_{ij} = \arcsin\left(\frac{G_{ij}}{A_{ij}}\right),$$

za $ij = 12, 13, 23$, potem še

$$\blacksquare C_i = \arccos\left(\frac{r_1s - r_jr_k}{r_1s + r_jr_k}\right)$$

za $ijk = 123, 213, 312$ in še

$$\blacksquare C_{ij} = \arccos\left(\frac{r_i - r_j}{r_i + r_j}\right),$$

za $ij = 12, 13, 23$, ko je $r_1 \geq r_2 \geq r_3 > 0$.

Potem je

$$\begin{aligned} L = & 2\pi s - r_1(S_{12} + S_{13} + C_1) - \\ & - r_2(S_{23} + S_{12} + C_2) - r_3(S_{13} + S_{23} + C_3) + \\ & + 2(G_{12} + G_{13} + G_{23}), \end{aligned}$$

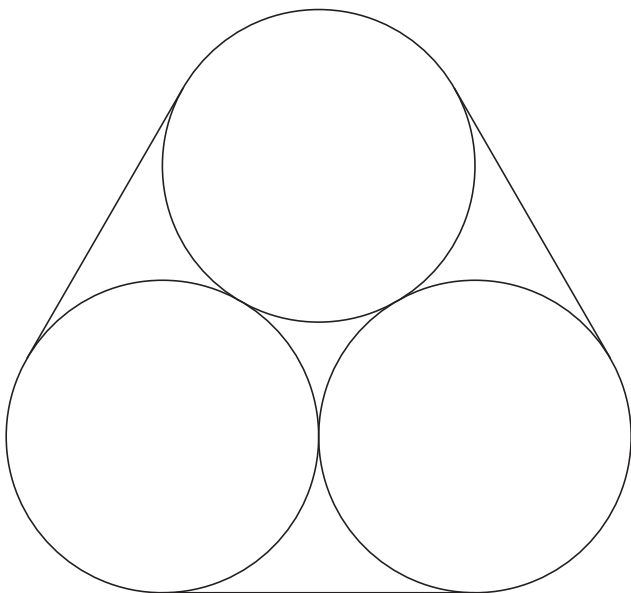
velja pa še različica te formule

$$\begin{aligned} L = & 2\pi s - r_1(C_{12} + C_{13} + C_1) - \\ & - r_2(C_{23} + C_{12} + C_2) - r_3(C_{13} + C_{23} + C_3) + \\ & + 2(G_{12} + G_{13} + G_{23}). \end{aligned}$$

Oglejmo si poseben primer, ko so vsi trije polmeri enaki. Takrat je $C_i = \arccos(2/4) = \pi/3$ in $C_{ij} = \arccos(0) = \pi/2$ ter

$$L = 6\pi r - (4\pi/3 \cdot 3)r + 6r = (2\pi + 6)r.$$

Takrat je videti elastika okoli treh krožnic takole:

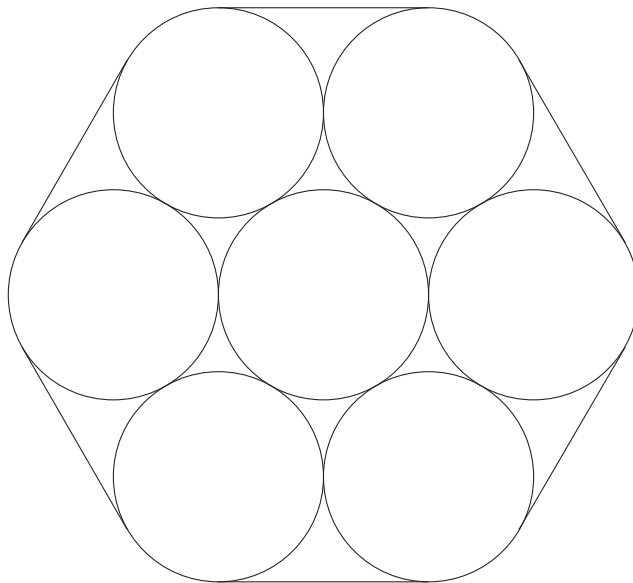


SLIKA 4.

Elastika okoli treh skladnih krožnic

Naloga

Izračunaj dolžino elastike pri spodnjem sistemu sedmih skladnih krožnic. (Odgovor: $L = (12 + 2\pi)r$.)



SLIKA 5.

Elastika okoli sedmih skladnih krožnic

× × ×

Mednarodna matematična olimpijada 2025 v Avstraliji

↓↓↓

PATRICIA KIRÁLY IN ŽIGA OŠTIR

→ Med 10. in 20. julijem se je kilometer od obale Tihega oceana v mestu Sunshine Coast v Avstraliji odvijala 66. Mednarodna matematična olimpijada. Na olimpijadi je letos sodelovalo 630 tekmovalcev iz 110 držav. Slovensko ekipo so tokrat zastopali

Nace Hranjec (ŠC Ravne na Koroškem), Ekaterina Chizhova, Andraž Čadež, Patricia Király, Žiga Oštir in Taras Vuk (vsi Gimnazija Bežigrad). Tekmovalce sta tudi letos spremljala Luka Horjak in Gregor Dolinar.



SLIKA 1.

Slovenska ekipa s spremljevalcema po podelitvi medalj



SLIKA 2.

Priprave s švicarsko ekipo so potekale v mestu Brisbane

Slovenci smo v avstralsko deželo prileteli že teden prej, saj so nas Švicarji v Brisbane povabili na tradicionalne skupne priprave, v katere je vključena tudi lihtenštajnska ekipa. Poleg intenzivnega reševanja nalog je ekipa trenirala tudi svoje fizične sposobnosti z modificiranim nogometom in s hitrostrnim premikanjem v nakupovalnih vozičkih. Raziskali smo center in botanični vrt mesta Brisbane in odpisali tradicionalno ekipno tekmovanje MESS (in vodjem ekip dali test z našimi lastnimi nalogami). Kmalu pa je bil čas za odpravo na dejansko prizorišče tekmovanja, kjer nas je pričakalo precejšnje število kengurujev!

Na otvoritveni prireditvi nas je predsednik Mednarodne matematične olimpijade, hkrati tudi vodja slovenske ekipe, Gregor Dolinar, navdihnil s citatom slovenskega alpinista Nejca Zaplotnika: »Tisti, ki iščejo cilj, bodo prazni, ko ga dosežejo. A tisti, ki najdejo pot, bodo vedno nosili cilj v sebi.« S tem zagonom smo tekmovanje zaključili zelo uspešno, saj je prav vsak odšel s pohvalo za v celoti rešeno nalogo, Žiga in Patricia pa sta osvojila še bronasti medalji.





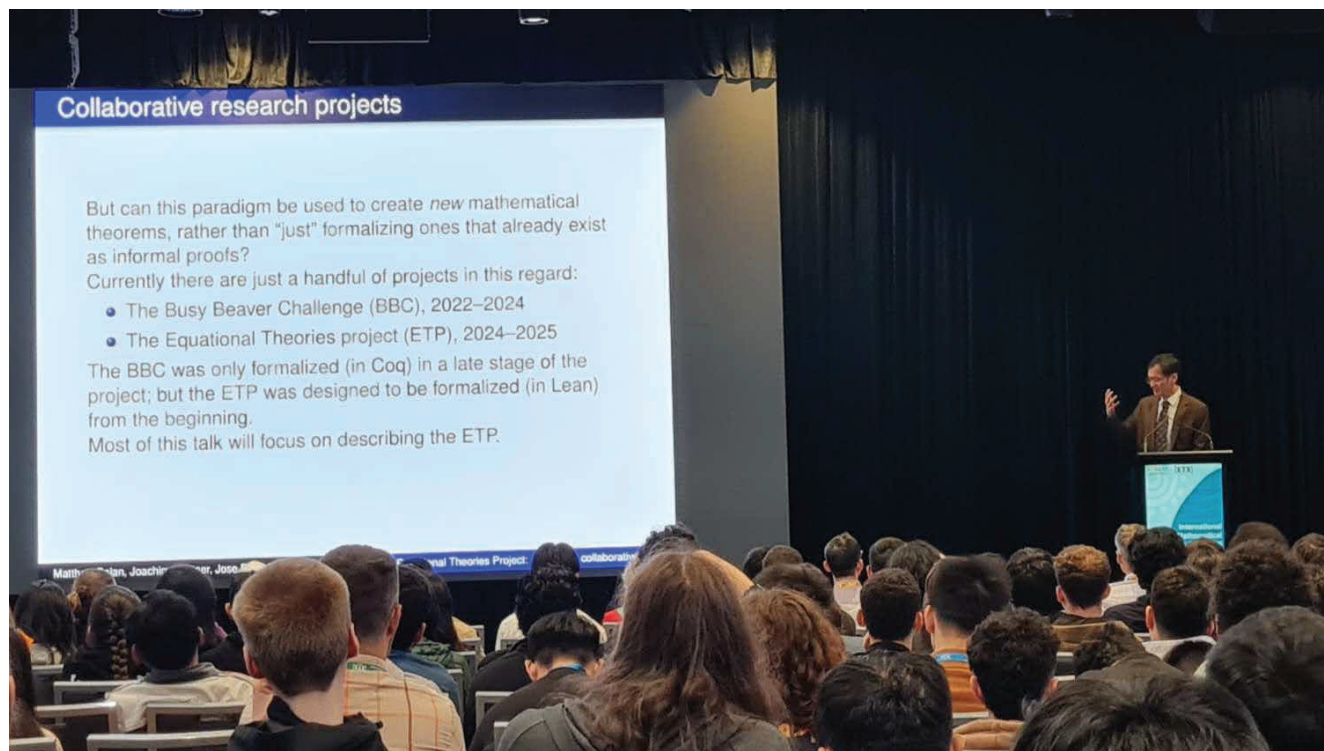
Kot običajno je imelo tekmovanje dva tekmovalna dneva, ki sta trajala 4 ure in pol. Vsak dan tekmovalci rešujejo po tri naloge, ki so načeloma urejene po težavnosti. Kot pričakovano, je bila najzahtevnejša 6. naloga, ki jo je rešilo le 6 tekmovalcev. Presenečala pa je 3. naloga, ki je bila bistveno lažja kot po navadi. Posledično so bile omejitve za medalje najvišje v zadnjih 20 letih, za zlato je bilo treba rešiti kar 5 nalog. Podeljenih je bilo rekordnih 72 zlatih medalj, saj je 46 tekmovalcev osvojilo 35 točk! Kitajska je letos zmagala s 6 zlatimi medaljami in si z zmago nad ZDA (ki so pristale na 2. mestu) povrnila ugled. Na tretjem mestu je spet končala Južna Koreja, najboljša evropska država pa je bila Poljska z osvojenim 5. mestom. Slovenija je na svetovni lestvici dosegla 59. mesto. Omenimo še, da so dogajanje popestrila tudi zanimiva predavanja svetovno znanih matematikov in diskusija o napredku umetne inteligence pri reševanju olimpijskih problemov.

V nadaljevanju je predstavljena rešitev prve (in najlažje) naloge, ki so jo predlagali Američani.

Naloga 1. Premica v ravnini se imenuje *sončna*, če ni vzporedna ne z x -osjo, ne z y -osjo in tudi ne s premico $x + y = 0$. Naj bo $n \geq 3$ dano celo število. Določi vsa nenegativna cela števila k , za katera obstaja n različnih premic v ravnini, ki zadoščajo obema naslednjima pogojema:

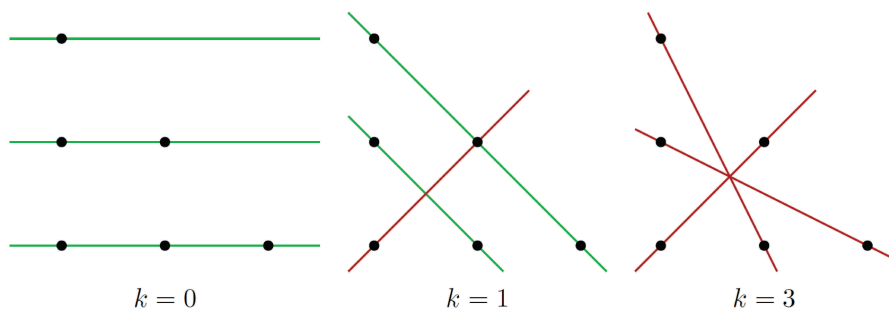
- za vsa naravna števila a in b , za katera velja $a + b \leq n + 1$, leži točka (a, b) vsaj na eni premici;
- natanko k od teh n premic je sončnih.

Rešitev: Najprej si oglejmo primer $n = 3$. Opazimo, da lahko vse točke (a, b) z lastnostjo $a + b \leq 4$, $a, b \in \mathbb{N}$ pokrijemo zaporedoma s $k = 0, 1$ ali 3 sončnimi premicami na naslednje načine, kot prikazuje slika 4.



SLIKA 3.

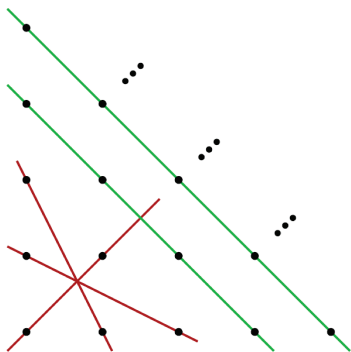
Znameniti Terrence Tao je za udeležence pripravil predavanje o sodelovanju velikih skupin raziskovalcev pri reševanju problemov.



SLIKA 4.

Trije načini pokritja točk za primer $n = 3$ s k sončnimi premicami (rdeče barve).

Premice, ki niso sončne, bomo odslej imenovali *oblačne*. Hitro lahko vidimo, da lahko z dodajanjem oblačnih diagonalnih premic posebni primer $n = 3$ za vrednosti $k = 0$, $k = 1$ in $k = 3$ posplošimo tudi na poljuben n , glej sliko 5.



SLIKA 5.

Dodajamo diagonale, $k = 3$.

Ker podobne konstrukcije za $n = 3$ in $k = 2$ ne najdemo, poskusimo s protislovjem dokazati, da ne obstaja. Predpostavimo, da lahko vseh šest točk prekrijemo z 2 sončnima in 1 oblačno premico. Ne glede na pozicijo oblačne premice nam vedno nekje ostanejo neke tri točke v obliki enakokrakega pravokotnega trikotnika, ki jih moramo prekriti z 2 sončnima premicama. To pa pomeni, da ena izmed sončnih premic vsebuje kar dve izmed teh treh točk. Toda vsaka taka premica je oblačna, torej smo prišli do protislovja. Za $n = 3$ ne moremo imeti dveh sončnih premic.

Zdaj pa si pogledimo še večje vrednosti $n > 3$. Ob poskušanju risanja konstrukcij lahko opazimo, da sončne premice pokrijejo relativno malo točk, zato lahko ugibamo, da jih bo malo. Prav tako vidimo, da vse konstrukcije vsebujejo *robne* premice (premič, ki sovpadajo z eno od stranic trikotnika: $x = 1$, $y = 1$ ali $x + y = n + 1$). To pa motivira naslednji razmislek: če v neki konstrukciji za n odstranimo eno robno premico in točke na njej, dobimo delujočo konstrukcijo za $n - 1$ z enakim številom sončnih premic!

Predpostavimo torej, da imamo neko delujočo konstrukcijo za (n, k) , $n > 3$, ki nima robnih oblačnih premic. Na stranicah trikotnika je $3(n - 1)$ točk (recimo jim *robne*), ki so prekrile z n premicami. Ker te premice niso robne, vsaka izmed njih seka največ dve stranici trikotnika, posledično pa vsebuje največ dve robni točki. Ker pa mora biti vsaka točka na vsaj eni premici, sledi neenakost

$$\blacksquare \quad 3(n - 1) \leq 2n,$$

ki je ekvivalentna $n \leq 3$, kar pa je seveda protislovje.

Ugotovili smo torej, da če v vsaki delujoči konstrukciji zaporedoma brišemo robne oblačne premice, prispemo na konstrukcijo za $n = 3$. Ta poseben primer naloge pa smo preverili že na začetku; ustrezne vrednosti k so le 0, 1 in 3. Ker delujejo za vsako izbiro n , je s tem naš dokaz končan. $\square$

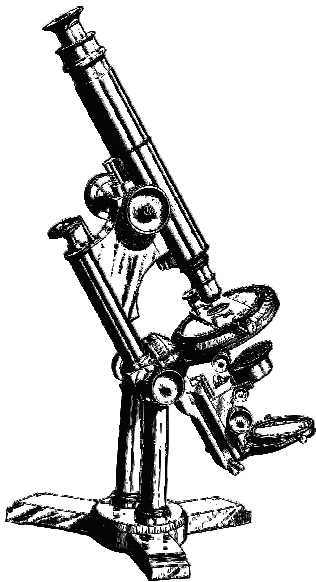
× × ×

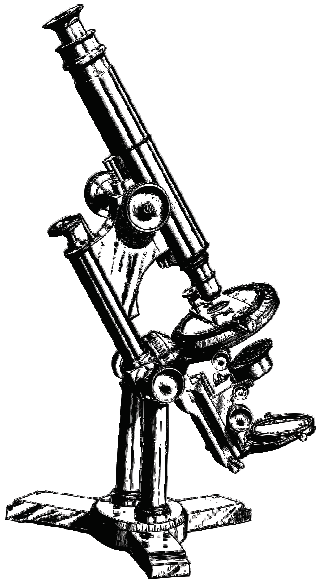
www.presek.si

www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/

↓↓↓

Nagradna križanka



										AVTOR MARKO BOKALIČ		OZVEZDJE ŽIVAL-SKEGA KROGA	NASELJE ONSTRAN KRKE PRI STRAŽI	OTO GIACO-MELLI	NEMŠKI SLIKAR IN REZBAR NOTKE
					NEPODRE-JENOST SAMO-VOLJNI OBLASTI										
					OKRASNA VRTNA CVETICA, ZAMETNICA								14		
					ROGER VADIM						PISATELJ MURNIK				
					STAR ANGLEŠKI KOLIDŽ										
					OVALNI GEOM. LIK										

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **12. oktobra 2025**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

✕ ✕ ✕

Globinska ostrina pri mikroskopu

↓↓↓

ANDREJ LIKAR

→ Z mikroskopom običajno preiskujemo biološke vzorce, ki so posebej pripravljeni. Tkivo razrežemo na zelo tanke rezine, ki jih stisnemo med tanki stekelci. Prav tako med stekelci kapnemo brise, v katerih iščemo mikroskopske organizme. Pred leti sem na boljšem sejmu kupil mikroskop, s katerim lahko opazujem tudi zelo velike vzorce v odbiti svetlobi. Mizico lahko izdatno premikam, prav tako celotno cev z objektivom in okularjem. Tako lahko opazujem na primer kristale v velikem vzorcu kamenine. S fotoaparatom v modernem telefonu (glej sliko 1) lahko sliko tudi kvalitetno posnamem in jo tudi digitalno povečam, saj imata telefon kot tudi mikroskop zelo kvalitetno optiko, fotoaparat pa tudi presenetljivo veliko ločljivost. Izdelal sem preprost stativ za telefon, ki ga pritrdim na mikroskop. Tako lahko nastavljam fotoaparat na ustrezno osvetlitev in ostrino glede na sliko na njegovem zaslonu. S prenosom slike v računalnik lahko sliko dodatno digitalno povečam, izboljšam kontrast, barve...

Z mikroskopom sem opazoval gručo piritnih kristalov, prikazano na sliki 2.

Pogled na sliko, ki jo vidimo skozi mikroskop, nas preseneti. Le majhen del slike je oster, ostalo je zamegljeno. Povsem drugače je na fotografiji, kjer vidimo ostre robove kristalov povsem jasno. Pravimo, da je globinska ostrina mikroskopske slike zelo majhna. Tudi pri običajni fotografiji včasih opazimo, da določeni deli slike niso ostri. Pri zelo odprti zaslonki je del slike oster, ostalo pa je bolj ali manj megleno.



SLIKA 1.

Sliko iz mikroskopa zajamemo s fotoaparatom v telefonu

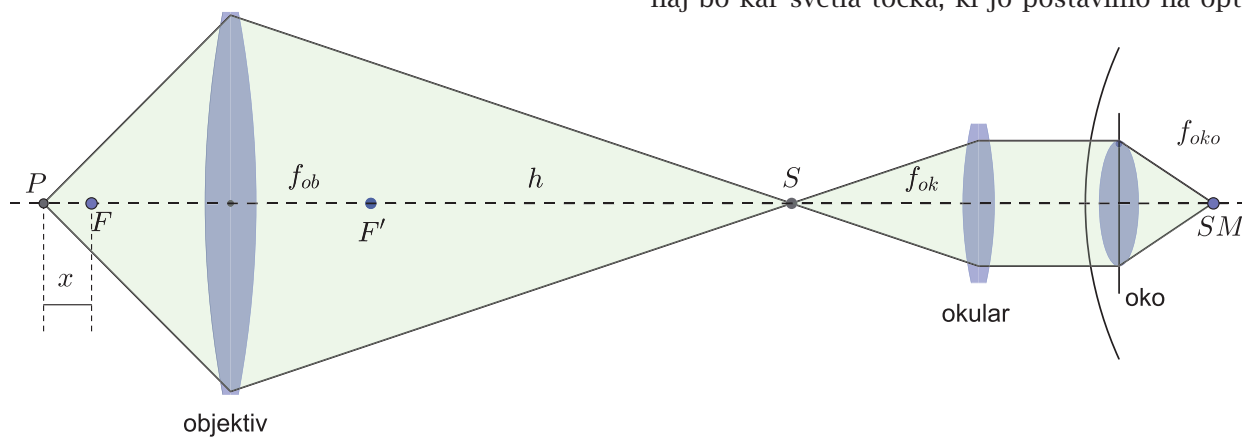
Ko skozi mikroskop opazujemo biološke vzorce, majhna globinska ostrina ne moti, ker so zelo tanki in postavljeni pravokotno na optično os mikroskopa. Povsem drugače pa je, ko opazujemo razsežne predmete. Da bi dobili ostro sliko po vsej globini pred-

**SLIKA 2.**

Gruča piritnih kristalov. S krožcem je označeno področje mikroskopske slike na desni.

meta, posnamejo zelo veliko slik z različno nastavitvijo mikroskopa, tako, da je na vsaki sliki oster le del predmeta. Potem slike računalniško obdelajo in jih sestavijo v eno samo, da je celotna slika predmeta ostra.

Preden se lotimo narediti nekaj podobnega, pogledajmo, kako bi ocenili globinsko ostrino slike pri mikroskopu. Najprej si oglejmo preprosto izvedbo mikroskopa z dvema tankima zbiralnima lečama. Lečo, ki je bližje opazovanemu predmetu, imenujemo objektiv, tisto pri očesu pa okular, glej sliko 3. Predmet P naj bo kar svetla točka, ki jo postavimo na optično

**SLIKA 3.**

Zasnova mikroskopa



os malo pred gorišče objektiv. Na njegovi drugi strani nastane realna slika S na razdalji h od gorišča objektiv F . Sliko S opazujemo z okularjem, ki ima gorišče v sliki S . Iz okularja zato izhaja vzporeden snop žarkov, ki ga leča v očesu, naravnana na neskončnost, preslika v točko SM na mrežnici. Točke seveda ne vidimo povečane, saj nima razsežnosti, a razsežen predmet vidimo povečanega. To nas trenutno ne bo zanimalo. Torej – točka na optični osi se preslika v točko na mrežnici. Sedaj pa točko P malo premaknimo, denimo za Δx , ne da bi premaknili še kaj drugega. Slika, ki jo naredi objektiv, se zato tudi premakne, denimo za Δh . Oba premika hitro povežemo, saj pri tanki zbiralni leči velja znana Newtonova enačba:

$$\blacksquare \quad xh = f_{ob}^2.$$

Tu je x razdalja predmeta od gorišča objektiv, h pa razdalja slike od gorišč na drugi strani objektiv. Če zapišemo

$$\blacksquare \quad \begin{aligned} h &= h_0 + \Delta h, \\ x &= x_0 + \Delta x, \end{aligned}$$

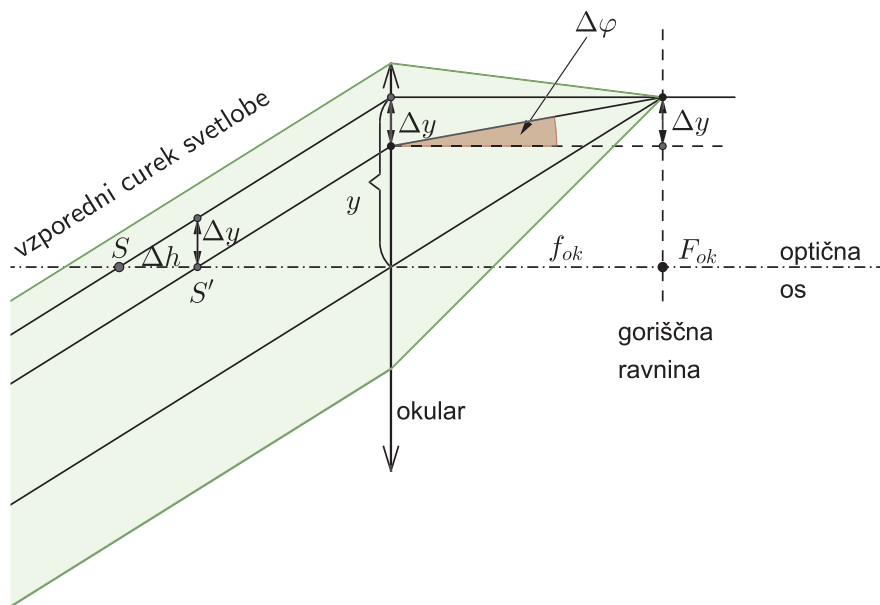
kjer je x_0 razdalja do predmeta, ki ga še nismo premaknili, h_0 pa oddaljenost njegove slike od gorišča. Iz Newtonove enačbe potem velja

$$\blacksquare \quad (x_0 + \Delta x)(h_0 + \Delta h) = f_{ob}^2$$

in zato:

$$\blacksquare \quad h_0 \Delta x = -x_0 \Delta h.$$

Produkt $\Delta x \Delta h$ smo zanemarili, ker sta tako Δx kot tudi Δh zelo majhna v primerjavi z x_0 ali h_0 . Premik slike bi premaknil tudi njeno sliko na mrežnici, a ker je oko naravnano na neskončnost, se na mrežnici pojavi krožec. Slika predmeta ni več jasna, je zamegljena. Ali to opazimo, pa je odvisno od premera krožca. Ker je mrežnica očesa sestavljena iz čutilnih celic, vidimo krožec le, če je večji od kakih $6 \mu\text{m}$. Premika predmeta torej ne bomo zaznali, če je na mrežnici njegova slika krožec s premerom manj kot $6 \mu\text{m}$. To povežemo s premikom Δx in razglasimo ta premik za globinsko ostrino mikroskopa.



SLIKA 4.

Lom žarkov v okularju.

Do te povezave pridemo z naslednjim premislekom. Na sliki 4 je prikazan okular in žarki, ki jih potrebujemo pri razlagi. Ko je slika predmeta v gorišču objektiv, pride skozi okular snop vzporednih žarkov. Pri premiku slike pa je šop pri $\Delta h > 0$ nekoliko razpršen. Izberimo žarek, ki gre skozi okular na njegovem robu v oddaljenosti y od optične osi. Pri $\Delta h = 0$ se bo ta žarek lomil tako, da bo po lomu vzporeden z optično osjo. Kako pa se bo lomil, če se slika premakne? Tu se spomnim izpita iz elementarne fizike, kjer je profesor narisal na tablo lečo, njeni gorišči in en sam žarek, ki pada nanjo. Narisati sem moral lomljeni žarek na drugi strani leče in seveda pojasniti, kako sem prišel do njegove smeri. Po kratkem premisleku sem prišel do rešitve. Posvetilo se mi je, da se vzporedni curek svetlobe zbere v goriščni ravnini. Med žarki v curku je tudi žarek, ki gre skozi središče leče in ta žarek se v leči ne lomi. Prav ta žarek pokaže točko, kjer se curek zbere. Tako imamo na drugi strani leče točko, skozi katero mora iti tudi prvotno narisani žarek. To uporabimo tudi pri določitvi kota, pod katerim se lomi robni žarek. Ker je premik slike majhen, bo tudi kot lomljenega žarka glede na optično os majhen. Zamislimo si curek vzporednih žarkov, ki zajame prvotno sliko in premaknjeno sliko. Ker se žarka, ki gresta skozi obe

sliki, srečata na drugi strani objektiv v isti točki, iz slike 4 razberemo, da velja

$$\frac{\Delta y}{\Delta h} = \frac{y}{f_{ok}}.$$

Potem je kot $\Delta\varphi$

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta y}{f_{ok}}.$$

Kako se ta rahlo divergentni snop lomi v očesu? S slike 5 na enak način kot pri okularju pridemo do polmera krožca na mrežnici. Spet igrata središčni žarek skozi lečo in robni žarek odločilno vlogo. Ker kot $\Delta\varphi$ imamo, je polmer krožca preprosto

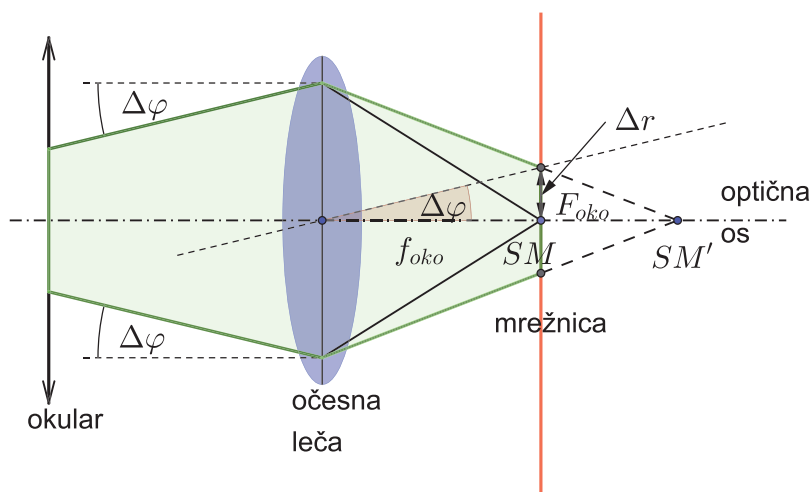
$$\Delta r = \Delta\varphi f_{oko}.$$

Končna povezava med premikom predmeta pred objektivom in krožcem v očesu je

$$\Delta r = \frac{y f_{oko} h_0^2}{f_{ob}^2 f_{ok}^2} \Delta x.$$

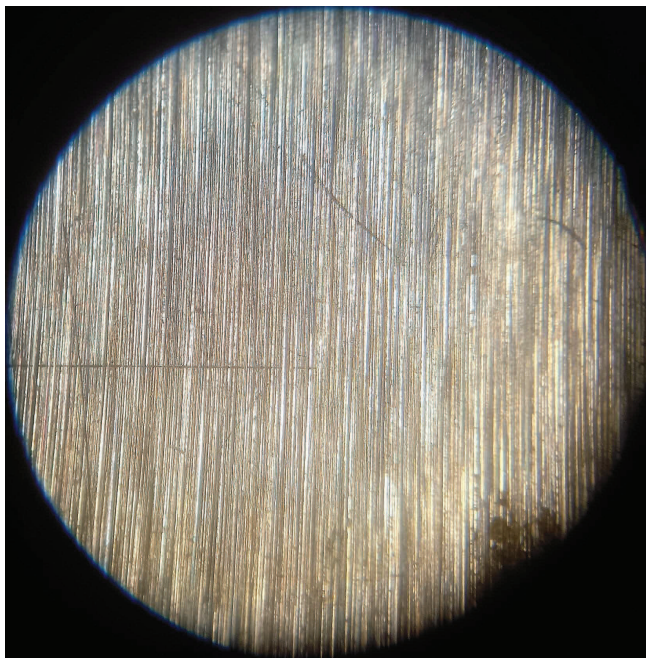
Globinska ostrina Δx bo torej

$$\Delta x = \frac{f_{ob}^2 f_{ok}^2}{y f_{oko} h_0^2} \Delta r. \quad (1)$$



SLIKA 5.

Potek žarkov v očesu. Rahlo razpršen snop žarkov iz premaknjene slike S' bi se zbral v točki SM' , na mrežnici pa tvori krožec s polmerom Δr

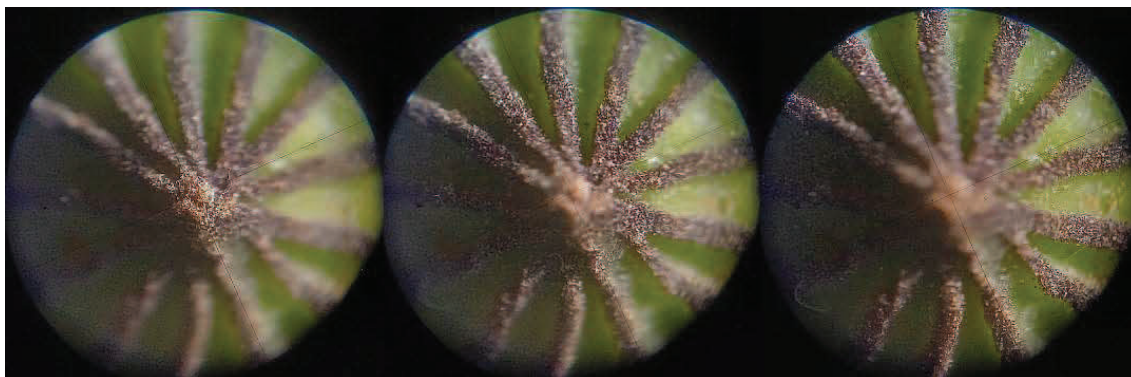
**SLIKA 6.**

Raze na jekleni kladici, kot jih vidimo na 5 mm dolgem koščku kladice skozi mikroskop. Na enem koncu smo 3,5 cm dolgo kladico dvignili za 0,2 mm. Na levi strani slike so raze ostro upodobljene, na desni pa so nekoliko nejasne. Na osnovi te slike ocenimo globinsko ostrino mikroskopa.

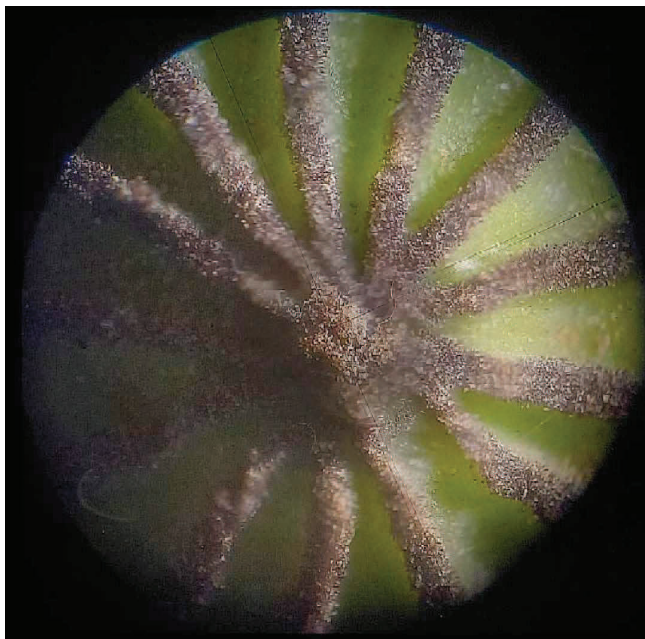
S podatki o mojem mikroskopu pridemo do te ocene za globinsko ostrino: $(\Delta x)_g \approx 20 \mu\text{m}$. Ocenimo preverimo z opazovanjem brušene kovinske kladice, kjer imamo zelo na gosto posejane raze od finega brušenja površine, glej sliko 6. Kladico smo na eni strani nekoliko dvignili z listom papirja z debelino 0,2 mm. Na levem koncu je slika izostrena, na razdalji 5 mm od levega roba pa že opazimo izgubo ostrine. Iz tega ocenimo globinsko ostrino na $\approx 15 \mu\text{m}$.

Enačba (1) pove, da bo globinska ostrina večja pri večjih goriščnih razdaljah objektiva in okularja in manjšem polmeru zaslonke γ pri okularju. Ker je povečava mikroskopa obratno sorazmerna od produkta $f_{ob}f_{ok}$, je pri velikih povečavah globinska ostrina zelo majhna. Sicer bi jo lahko povečali z zmanjševanjem γ , a bi potem skozi mikroskop videli pretemno sliko. Pri zgornjih izvajanjih smo zamenjali valovni značaj svetlobe, ki sliko točke nekoliko zamegli. Pri naši povečavi uklon svetlobe nima zaznavnega vpliva.

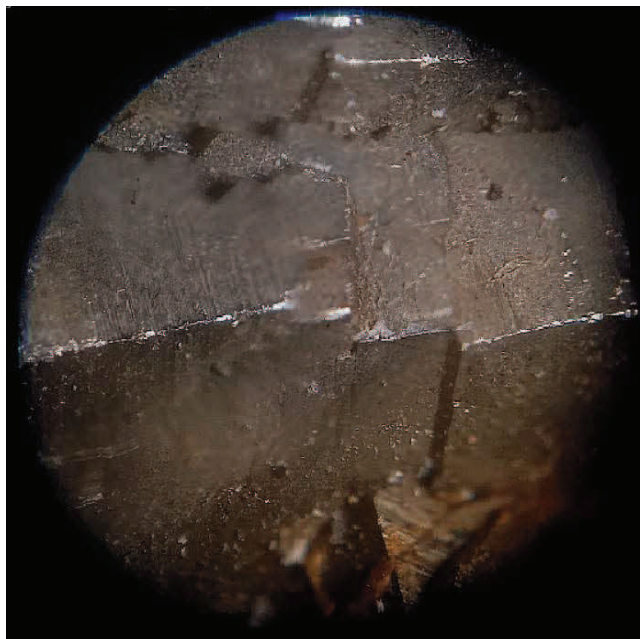
Slika skozi mikroskop torej hitro izgubi ostrino zunaj ostro upodobljenih podrobnosti. Za oster pogled na predmet potrebujemo veliko slik, ki so izostrene na različnih področjih predmeta. Na sliki 7 smo slikali makovo glavico običajnega poljskega maka, ki ga pogosto najdemo med posejanim žitom. Vidimo, da je na desni ostro prikazan le osrednji del glavice, na naslednjih slikah pa vse bolj robni deli.

**SLIKA 7.**

Posnetki makove glavice z ostrimi predeli na različnih mestih.

**SLIKA 8.**

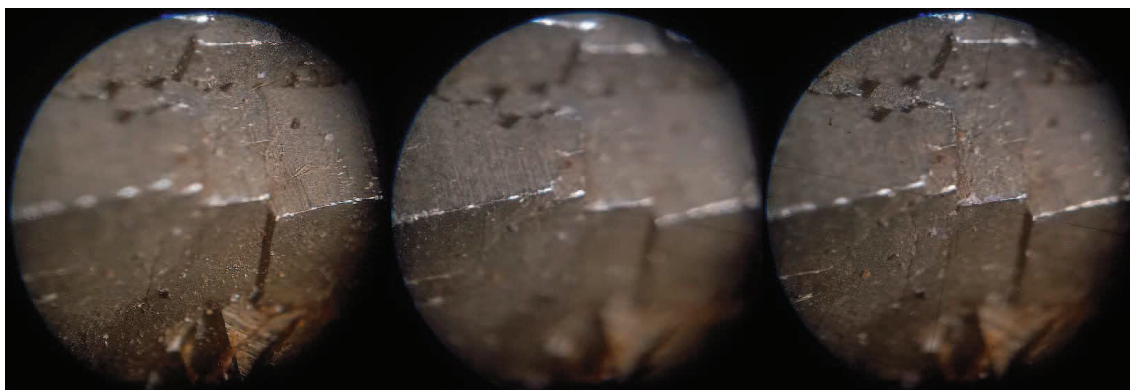
Združena slika makove glavice. Nekateri predeli so še vedno nekoliko nejasni, za boljšo sliko bi potrebovali več osnovnih slik.

**SLIKA 10.**

Združena slika kristala.

Vse tri slike sem združil v eno samo tako, da sem zatemnil neostre dele slik, glej sliko 8. Nekaj neostrih delov na sliki še vedno vidimo, a je slika kljub temu sprejemljiva, ker so ostali deli zelo ostri. Poklicni fotografi naredijo zelo veliko slik z ostrinami na njihovih različnih delih in jih nato združijo računalniško

s posebej za to razvitimi programi. Na sliki 9 je podobna fotografija treh posnetkov kristalnega sklada, ki so ostri le na določenih predelih. Na sliki 10 smo združili te posnetke, ki smo jim pred tem računalniško zatemnili neostre dele.

**SLIKA 9.**

Slike kristala, ki so ostre na omejenih predelih.

× × ×

Jubilejna 10. srednjeevropska olimpijada iz astronomije in astrofizike

↓↓↓

VID KAVČIČ

→ Med 3. in 5. julijem 2025 smo v Avberju na Krasu gostili jubilejno 10. srednjeevropsko olimpijado iz astronomije in astrofizike (SOAA). Slovenska ekipa se je na tekmovanju več kot odlično odrezala – tekmovalke in tekmovalci so skupaj osvojili kar 7 medalj in pohval.



SLIKA 1.

Udeleženke in udeleženci 10. srednjeevropske olimpijade iz astronomije in astrofizike. Fotografija: Andrej Guštin.

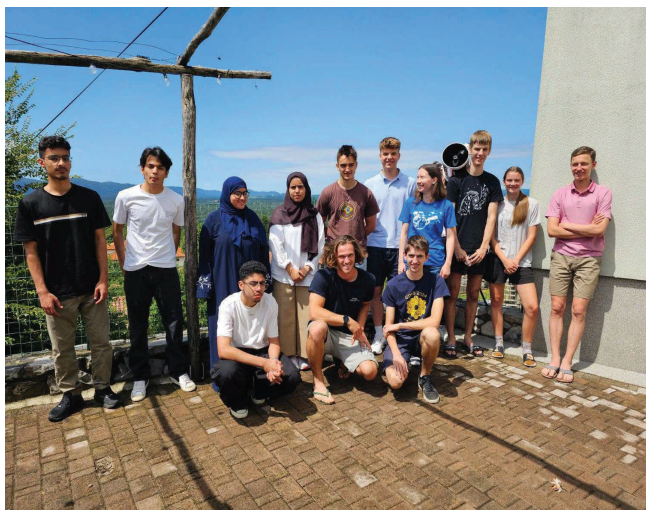
1. Izvrsten uspeh slovenske ekipe: dve zlati, dve srebrni, dve bronasti medalji in pohvala

Na tekmovanju je zmagal **Žan Arsov**, ki je poleg skupne zmage dosegel tudi največ točk pri obdelavi podatkov in v opazovalnem delu. Pri teoretičnih nalogah je bil najuspešnejši **Primož Markovič**. Oba sta za svoja izjemna dosežka prejela **zlati medalji**. Zelo uspešni so bili tudi ostali slovenski tekmovalke in tekmovalci: **Niko Habinc**, **Anže Jakovac** in **Žiga Vučajnk** so osvojili **srebrne medalje**, **Blaž Gašperlin** in **Nika Videnšek Podgorelec** pa **bronasti medalji**. **Nika Arsov** je prejela **pohvalo**.

Tekmovanje sta organizirala **DMFA Slovenije** in **Zavod Cosmolab**. Organizacijski odbor olimpijade so sestavljali **Vid Kavčič**, **Andrej Guštin** in **Bojana Ukmar**. K izvedbi tekmovanja so neprecenljivo prispevali **Simon Bukovšek**, **Urban Razpotnik**, **Peter Andolšek** in **Aleš Rus**.

Letos se je na tekmovanju pomerilo pet držav: Slovenija, Hrvaška, Madžarska, Avstrija in Saudova Arabija. Udeleženci so svoje znanje preizkusili v reševanju teoretičnih nalog, obdelavi astronomskih podatkov in v nočnem opazovanju neba. Po koncu olimpijade so potekale dodatne priprave na Mednarodno olimpijado iz astronomije in astrofizike, na katerih se je našim tekmovalkam in tekmovalcem pridružila še ekipa Saudove Arabije.

V članku predstavljamo izbor treh krajših teoretičnih izzivov in naloge z opazovalnega dela tekmovanja.


SLIKA 2.

Slovenski ekipe se je na dodatnih pripravah po tekmovalstvu pridružila še ekipa tekmovalk in tekmovalcev iz Saudove Arabije. Fotografija: Bojana Ukmar.


SLIKA 3.

Modra spirala nad Švedsko (fotografija: Henk Troostheide).

2. Teoretične naloge

2.1 Modra spirala

Naloga

V ponedeljek, 24. marca 2025, je okoli 21. ure nebo nad Slovenijo in velikim delom Evrope razsvetlila ne navadna modra spirala (slika 3). Svetel pojav, ki se je zgodil na višini $h = 80$ km nad Zemljinim površjem, je povzročil izpust goriva iz rakete Falcon 9 podjetja SpaceX.

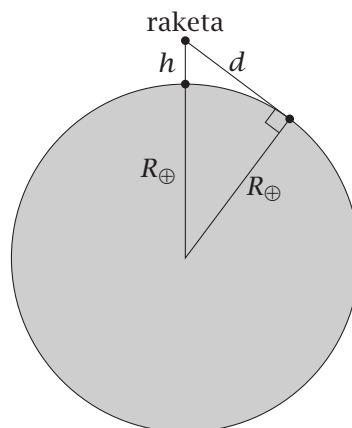
- Oceni največjo razdaljo d , na kateri bi lahko opazovalka na Zemljinem površju ob 21.00 še opazovala modro spiralo. Navedi vse predpostavke, ki jih sprejmeš pri oceni.
- Oceni delež Zemljinega površja, s katerega se je v danem trenutku mogoče videti modro spiralo.

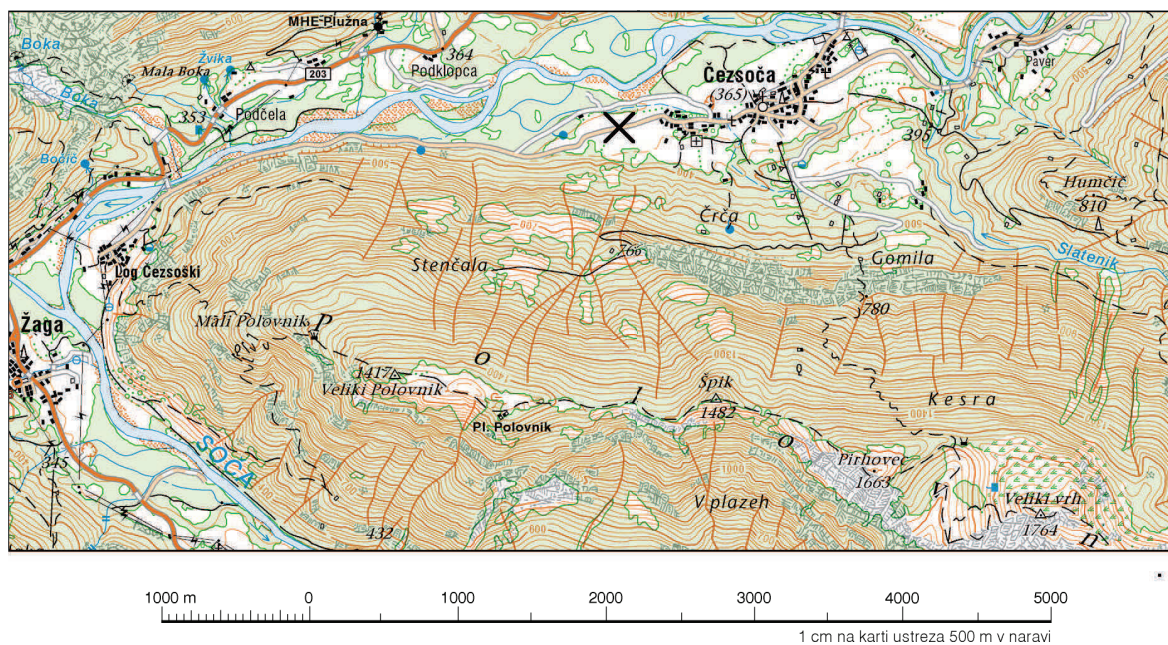
Namig: Površina krogelne kapice je podana z izrazom $S = 2\pi r a$, kjer je a višina kapice in r polmer sfere.

Rešitev

- Narišemo skico in označimo relevantne količine. Za pravokotni trikotnik zapišemo Pitagorov izrek in dobimo

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(R_{\oplus} + h)^2 - R_{\oplus}^2} \\ &= \sqrt{h(2R_{\oplus} + h)} \simeq 1000 \text{ km.} \end{aligned}$$





SLIKA 4.

Karta Čezsoče in okolice.

- b) Površino območja, s katerega je pojav možno opazovati, lahko geometrijsko opišemo s krogelno kapico. Sfera ima polmer $r = R_{\odot}$, iz podobnih trikotnikov na skici pa dobimo:

$$\frac{R_{\odot}}{R_{\odot} + h} = \frac{R_{\odot} - a}{R_{\odot}}.$$

S tem v zvezi izrazimo

$$a = R_{\odot} \left(1 - \frac{R_{\odot}}{R_{\odot} + h} \right) = \frac{R_{\odot} h}{R_{\odot} + h}.$$

Površina krogelne kapice je:

$$S = 2\pi R_{\odot} a = \frac{2\pi R_{\odot}^2 h}{R_{\odot} + h}.$$

Površina Zemlje je $S_{\oplus} = 4\pi R_{\oplus}^2$, torej je delež Zemljinega površja podan z

$$\eta = \frac{S}{S_{\oplus}} = \frac{h}{2(R_{\odot} + h)} \simeq 0,6\%.$$

2.2 Polarna noč v Čezsoči

Naloga

Čezsoča ($\varphi = 46^{\circ}19'$, $\lambda = 13^{\circ}33'$) je manjše naselje v južnem delu Bovške kotline. Več dni v letu prebivalci Čezsoče ne vidijo Sonca, saj se južno od naselja razteza greben Polovnik (glej sliko 4). Oцени, koliko dni v letu Sonce ne posije na kraj, označen s črnim križcem. Smer proti severu je navzgor. Navedi vse predpostavke, ki jih sprejmeš pri oceni.

Rešitev

Opazimo, da imamo na jugu sedlo med dvema hriboma, torej bo ravno tam kritična točka, kjer se bo Sonce le za las pojavilo na kritičnih dnevih.

Najprej izmerimo vodoravno razdaljo $y = 1870$ m in razliko v višini $z = 1370$ m – 365 m ≈ 1000 m med opazovalko in sedlom.

Izračunamo višino h Sonca nad obzorjem v trenutku, ko opazovalka opoldne zagleda zgornji rob Sončeve ploskvice:

$$\tan(h + \theta_{\odot}/2) = \frac{z}{y}, \quad h = 27,9^\circ.$$

Upoštevali smo, da je premer Sončeve ploskvice enak $\theta_{\odot} = 32^\circ$. Nato izračunamo Sončevo deklinacijo $\delta_{\odot}$ v tem trenutku. Velja

$$\delta_{\odot} = h + \varphi - 90^\circ = -15,8^\circ.$$

Deklinacijo lahko povežemo z ekliptično dolžino L Sonca na ta dan. Spomnimo se standardne zveze iz sferne trigonometrije:

$$\sin \delta_{\odot} = \sin \varepsilon \sin L, \quad L_1 = 223,1^\circ, \quad L_2 = 316,9^\circ.$$

Predpostavimo, da se Sonce enakomerno giblje po ekliptiki in da je časovni presledek med izračunanimi ekliptičnima dolžinama enak Δt . Potem je

$$\Delta t = \frac{L_2 - L_1}{360^\circ} \cdot 365,25 \text{ dni} \approx 95 \text{ dni}.$$

Opazovalka v Čezsoči torej Sonca ne vidi približno tri mesece na leto.

2.3 Kamenjajmo Sonce

Naloga

Gnamun nekega sončnega dne v kraju na ekvatorju opazuje Sonce, ki ravno prečka zenit. Kolikšna je najmanjša hitrost, s katero mora glede na Zemljo vreči kamen v smeri proti Soncu, da kamen zadene Sonce? Zanemari vplive Zemljinega ozračja, eliptičnost Zemljinega tira, Zemljino vrtenje okrog lastne osi in njeno gravitacijo.

Rešitev

Predpostavimo, da Gnamun kamen vrže tako, da ravno še zadene Sonce. To pomeni, da v periheliju oddaljenost kamna od središča Sonca ustreza ravno Sončevemu polmeru $R_{\odot}$. Označimo hitrost kamna v periheliju z v_p . Začetna hitrost kamna ima dve komponenti: navpična komponenta meta $v_{\perp}$ in Zemljina krožilna hitrost okrog Sonca $v_{\parallel}$. Ker je Sonce v zenitu, sta dve komponenti hitrosti pravokotni in za

začetno hitrost v velja $v^2 = v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2$. Če zanemarimo vrtenje Zemlje okoli lastne osi, lahko izrazimo

$$v_{\parallel} = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{r_{\oplus}}}.$$

Zapišemo izrek o ohranitvi vrtilne količine za točko na Zemljini tirnici na oddaljenosti $r_{\oplus}$ in za točko na površju Sonca (na oddaljenost $R_{\odot}$). Velja

$$v_p R_{\odot} = v_{\parallel} r_{\oplus}.$$

Poleg tega iz energijskega izreka sledi

$$-\frac{GM_{\odot}}{R_{\odot}} + \frac{v_p^2}{2} = -\frac{GM_{\odot}}{r_{\oplus}} + \frac{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2}{2}.$$

Hitrost v_p izrazimo iz izreka o ohranitvi vrtilne količine in izraz vstavimo v energijski izrek. Dobimo:

$$-\frac{GM_{\odot}}{R_{\odot}} + \frac{v_{\parallel}^2 r_{\oplus}^2}{2 R_{\odot}^2} = -\frac{GM_{\odot}}{r_{\oplus}} + \frac{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2}{2}.$$

Iz zgornje enačbe izrazimo $v_{\perp}$ in dobimo:

$$v_{\perp} = \sqrt{-\frac{2GM_{\odot}}{R_{\odot}} + \frac{2GM_{\odot}}{r_{\oplus}} + v_{\parallel}^2 \left(\frac{r_{\oplus}^2}{R_{\odot}^2} - 1 \right)} \\ = \sqrt{-\frac{2GM_{\odot}}{R_{\odot}} + \frac{2GM_{\odot}}{r_{\oplus}} + \frac{GM_{\odot}}{r_{\oplus}} \left(\frac{r_{\oplus}^2}{R_{\odot}^2} - 1 \right)}.$$

Ker je polmer Zemljine tirnice veliko večji od Sončevega polmera ($r_{\oplus} \gg R_{\odot}$), lahko rezultat poenostavimo:

$$v_{\perp} = \frac{r_{\oplus}}{R_{\odot}} \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{r_{\oplus}}} = 6400 \text{ km/s}.$$

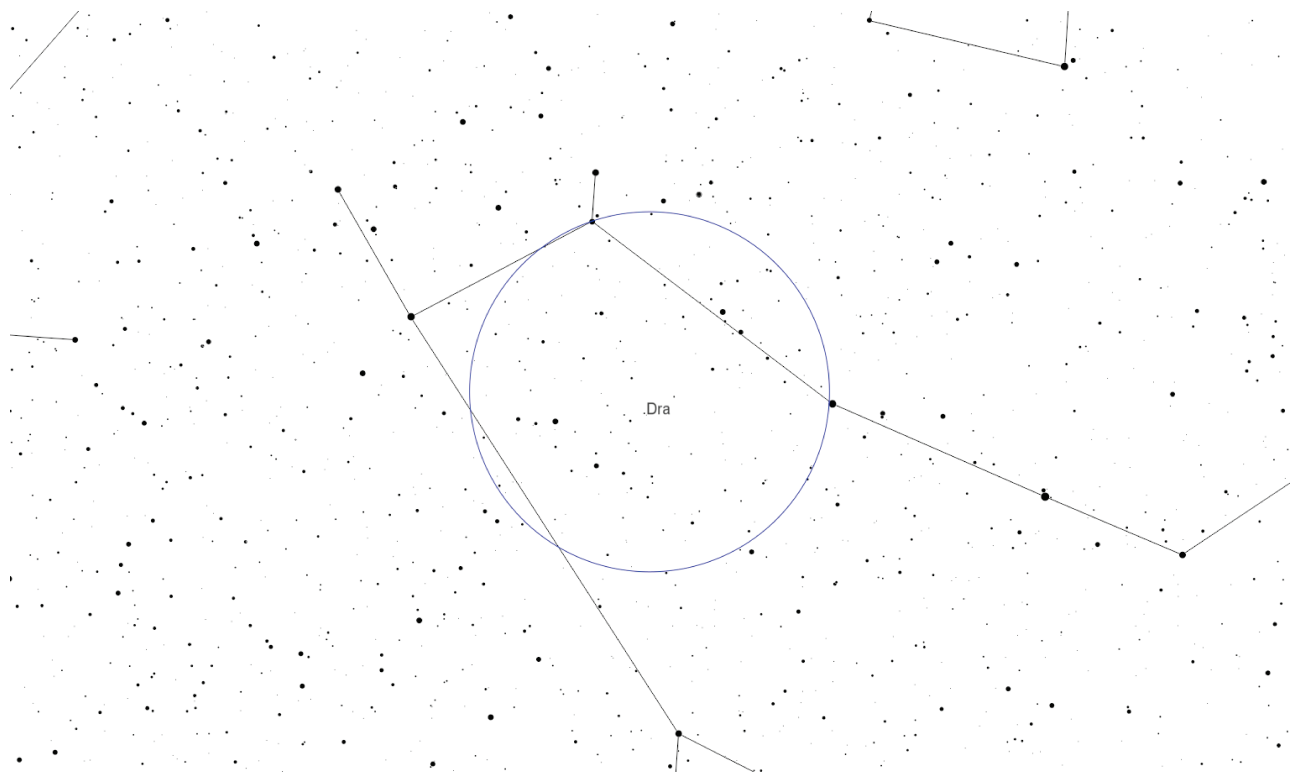
Gnamun mora kamen vreči s hitrostjo okoli 6400 km/s. Ta hitrost je veliko večja od ubežne hitrosti s površja Zemlje, zato smo lahko res upravičeno zanemarili učinke Zemljine težnosti in vrtenja okrog lastne osi.

3. Opazovalne naloge

3.1 Naloga z ekvatorsko montažo

Zaradi precesije vozlov se tekom približno 19 let menjajo zvezde, ki jih Luna lahko okultira. τ Škorpiona (2° jugovzhodno od α Škorpiona) je trenutno





SLIKA 5.

Okolice severnega pola ekliptike.

ena izmed zvezd, ki ležijo manj kot $0,3^\circ$ stran od Lunine tirnice in je zato okultacija možna vsak mesec. Montaža je že poravnana na severni nebesni pol.

- Z ekvatorsko montažo izmeri razdaljo med Luno in zvezdo τ Škorpiona. Oцени, čez koliko časa bo prišlo do naslednje možne okultacije. Predpostavi, da se Luna po nebu premika enakomerno.
- Označi, kje na izrisani krožnici (glej sliko 5) se trenutno nahaja severni pol Lunine tirnice. Središče karte ustreza severnemu polu ekliptike, severni nebesni pol pa se nahaja v smeri navzgor.

Za bolj natančne meritve deklinacije lahko se lahko v tem delu naloge opreš na podatek o deklinaciji α Škorpiona: $-26^\circ 26'$.

3.2 Naloga z Dobsonom

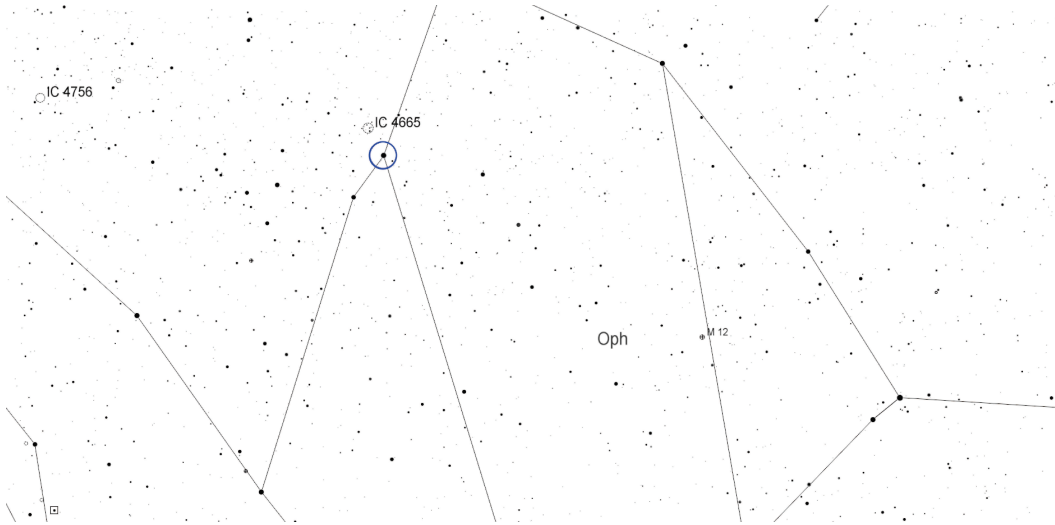
- S karto na sliki 6 poišči razsuto kopico IC 4665. Postavi jo v sredino vidnega polja in jo pokaži ocenjevalcu.
- S teleskopom izmeri kotno razdaljo med središčem kopice in zvezdo Cebalrai, ki je na sliki označena z modrim krogom. Opiši svoj postopek.

3.3 Opazovanje s prostim očesom

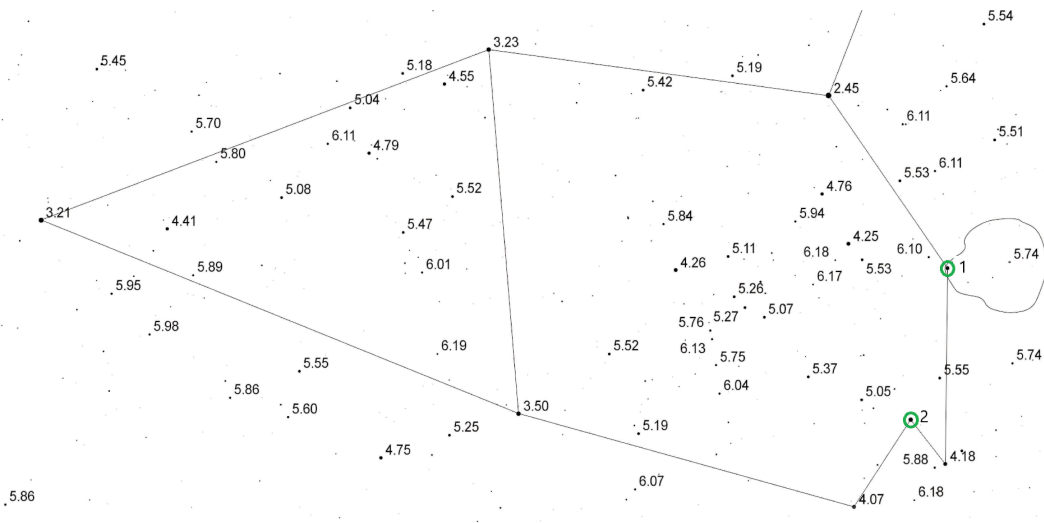
- Poimenuj 5 ozvezdij, ki ležijo na ekliptiki in so trenutno nad obzorjem, ter za vsako navedi zvezdo α ter 1 Messierjev objekt, ki leži znotraj meja tega ozvezdja.

Preostale podnaloge se navezujejo na karto ozvezdja Kefej (slika 7).

- b) Čim bolj natančno določi mejni sij in navidezni sij obeh označenih zvezd. Natančno opiši svoj postopek.
- c) Poimenuj meglico na desni strani karte. Lahko zapišeš trivialno ime ali kataloško oznako.



SLIKA 6.
Ozvezdje Kačenosec



SLIKA 7.
Ozvezdje Kefej

Poročilo o velikem vseslovenskem verižnem eksperimentu

PRESEK, LETNIK 33, ŠTEVILKA 1.

↓↓↓

→ Pred dobrimi dvajsetimi leti je v Sloveniji potekala celoletna promocijska aktivnost Svetovno leto fizike 2004, ki jo je pod okriljem DMFA Slovenije vodil dr. Jurij Bajc. Ena najzanimivejših vsebin v bogatem programu je bil Verižni eksperiment, ki so ga fizikalni navdušenci iz vse Slovenije prvič izvedli oktobra 2004 na Festivalu znanosti v Narodni galeriji, v večji izvedbi pa ponovili pred 1000 gledalci v Cankarjevem domu maja 2005. Na tej prvi vseslovenski ponovitvi je sodelovalo 53 fizikalnih naprav, o poteku in tudi o nekaterih napravah pa je tedaj pisala tudi naša revija. Aktivnost Verižni eksperiment se je potem še vrsto let nadaljevala (skoraj) vsako leto z novimi ustvarjalci naprav in z zaključno prireditvijo na različnih lokacijah po Sloveniji. Zadnjič smo Verižni eksperiment množično izvedli na odru prireditve Bistroumi v Gallusovi dvorani leta 2019, ko smo z njo obeležili tudi 70 let delovanja društva DMFA Slovenije. Morda bo kmalu čas za naslednjo ponovitev?



Poročilo o velikem vseslovenskem verižnem eksperimentu

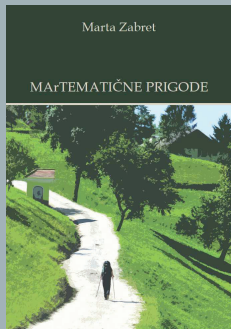
V Cankarjevem domu v Ljubljani smo 14. maja 2005 uspešno pognali v tek 80 metrov dolgo verigo fizikalnih eksperimentov. Sestavljala jo je 53 naprav – členov verige, ki so jih pripravile ekipe iz vse Slovenije. Sodelovali so otroci iz vrtcev, ekipe iz osnovnih in srednjih šol. Študente iz ljubljanske in mariborske univerze ter celo upokojenci. Dinamično dogajanje se je od začetka do konca verige prenašalo skoraj 30 minut. Vsak izmed členov verige se je »sprožil« tako, da je ujel kroglico, ki je prišla iz predhodne naprave, zaključil pa s tem, da je »oddal« kroglico naslednji napravi. Dogodek si je prišlo ogledat preko tisoč radovednežev, ki so občudovali domiselno in izvirno izdelane naprave. Le-te so se ponašale tudi z zanimivimi imeni, od dokaj nazornih, kot so, denimo, Nagajivi škripci, Hidravlični oven in Električni tobogan, do precej abstraktnih, kot na primer Š top Lee Gun ali pa Čubali slamtank. V imenih ni manjkalo tudi slavnih znanstvenikov. Tako smo lahko videli, denimo, Einstein čaj plac in Baltazarja. Našel pa se je tudi Hrček v kletki in Striček na lojtri. Poleg naprav Verižnega eksperimenta so si obiskovalci lahko ogledali tudi različne zanimivosti v pestrem spremljevalnem programu.

Irena Drevenšek Olenik

Za sodelujoče ekipe se je dogajanje v Cankarjevem domu pričelo že ob osmih zjutraj, ko se je pred vhom v veliko sprejemno dvorano nagnala dolga vrsta avtomobilov z vseh koncev Slovenije. Vsi so želeli do uradnega začetka prireditve imeti dovolj časa, da zlepijo vse kose, ki niso šli v pripravljen, ali pa so razpadli med transportom, da preverijo različne stike in električne kontakte, preizkusijo delovanje kritičnih delov in podobno. Pomembno je bilo tudi preizkusiti, če povezava s sosednjimi napravami v verigi zares deluje, kot je bilo zamišljeno. Nekaterim je povzročala preglednice orientacija postavitev, ki je bila drugačna, kot so predvidevali. A na srečo smo, v duhu eksperimentiranja in improviziranja, ki sta nas spremljala že nekaj predhodnih mesecev, do enajstih večino problemov uspešno rešili.

Nekaj iz ponudbe Založbe FMF

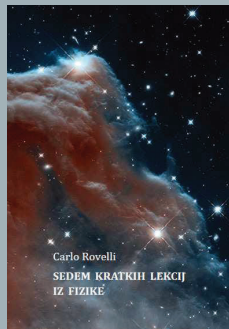
V Založbi Fakultete za matematiko in fiziko izdajamo matematično in fizikalno literaturo.
V nadaljevanju vam predstavljamo dve knjigi.



Marta Zabret:
MATHEMATISCHE PRIGODE

148 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

12,50 EUR



Carlo Rovelli:
SEDEM KRATKIH LEKCIJ IZ FIZIKE

76 strani
format 12 × 17 cm
mehka vezava

9,50 EUR

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela.

<https://www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/katalog/>

Dodatne informacije lahko dobite v knjižnici Fakultete za matematiko in fiziko po telefonu (01) 4766 558.

↓↓↓

1	J	A	P	O	N	S	K	A	
2	U	P	O	R	N	O	S	T	
3	G	O	N	G	D	E	L		
4	O	T	K	A	A	N	A		
5	Z	E	N	E	R	O	N		
6	A	K	S	E	L	N	T		
7	M	O	O	R	E	V	R	V	
8	M	I	N	U	E	N	D	I	
9	E	L	I	P	S	A	D	I	
10	L	U	C	A	S	K	E	N	
11	S	A	R	I	O	M	A	J	
12	A	T	J	E	R	K	O	C	
13	K	R	M	A	R	J	E	N	
14	C	A	R	L	A	T	T	E	
15	E	T	E	N	V	A	A	L	
16	N	O	Z	I	C	E	Z	A	
17	T	R	A	K	E	C	A	R	

1	A	M	O	N	I	A	K	
2	L	A	T	E	R	N	A	
3	B	R	I	R	I	Ž		
4	R	A	H	I	T	I	S	
5	E	T	E					
6	T	H	O	M	A	S	R	
7	K	O	T	N	I	K		
8	P	L	E	M	I	Č		
9	S	A	T	U	R	N		
10	A	F	S	V	E	D		
11	E	O	L	M	N	A	J	
12	S	T	E	R	I	M		
13	A	R	A	J	S	T	N	
14	S	S	O	M	S	K	A	
15	S	K	A	S	E	K	A	
16	P	A	N	J	R	A	Č	
17	A	N	T	O	N	L	I	
18	J	E	S	E	N	I	Č	
19	E	M	E	T	I	N		

REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 52/6

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz šeste številke Preseka letnika 52 je **kozmični glasovi**. Med pravilnimi rešitvami smo izžrebali naslednje reševalce: Anže Mihelčič iz Kresnice, Peter Pešec iz Črnuč, Karel Rankel iz Kranja, ki bodo nagrade prejeli po pošti.

× × ×

Andrej Guštin, Dunja Fabjan, Vid Kavčič, Simon Bukovšek

Zbirka nalog z astronomskih tekmovanj 2009–2024

Teorija in rešene naloge za srednje šole

Ob 15. obletnici tekmovanj iz astronomije je pri založbi FMF izšla Zbirka nalog z astronomskih tekmovanj – teorija in rešene naloge za srednje šole.

Poleg več kot **230 rešenih nalog** s šolskih, z državnih in izbirnih tekmovanj za srednje šole prinaša zbirka tudi **povzetke teorije**, ki bodo v pomoč tekmovalkam in tekmovalcem pri pripravi na astronomska tekmovanja. Zbirko bogati več kot **140 skic in fotografij**, ki bralkam in bralcem pomagajo pri razumevanju vsebine.

Zbirka je razdeljena na šest tematskih sklopov: **osnove astronomije, nebesna mehanika, svetloba in sevanje, zvezde in zvezdni sistemi, kozmologija in optika**. Vsak tematski sklop se začne s povzetkom teoretičnih vsebin, vse od temeljnih pa do zahtevnejših konceptov. Sledi izbor nalog, ki se navezujejo na obravnavano tematiko. Urejene so po težavnosti, hkrati pa je vsaka naloga opremljena tudi z oznako letnice in ravni tekmovanja. Poleg tega zbirka zajema tudi sklope **koristne matematične veze, obdelava podatkov in vrtljiva zvezdna karta**.

Zbirka predstavlja prvo tovrstno gradivo pri nas, zato je nepogrešljiv pripomoček za mlade astronomke in astronome, ki si želijo boljšega razumevanja in bolj poglobljenega stika z astronomijo. Hkrati pa lahko služi kot odličen pripomoček za pripravo na šolska, državna in izbirna tekmovanja iz astronomije – tako za dijakinje in dijake kot tudi njihove mentorice in mentorje. V veliko pomoč pa bo tudi študentkam in študentom, ki se astronomiji posvečajo v okviru univerzitetnega študija na prvi stopnji.

Poleg omenjene knjige ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitev so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

<https://www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/katalog/>

Dodatne informacije lahko dobite v knjižnici Fakultete za matematiko in fiziko po telefonu (01) 4766 558.



9 770351 665319