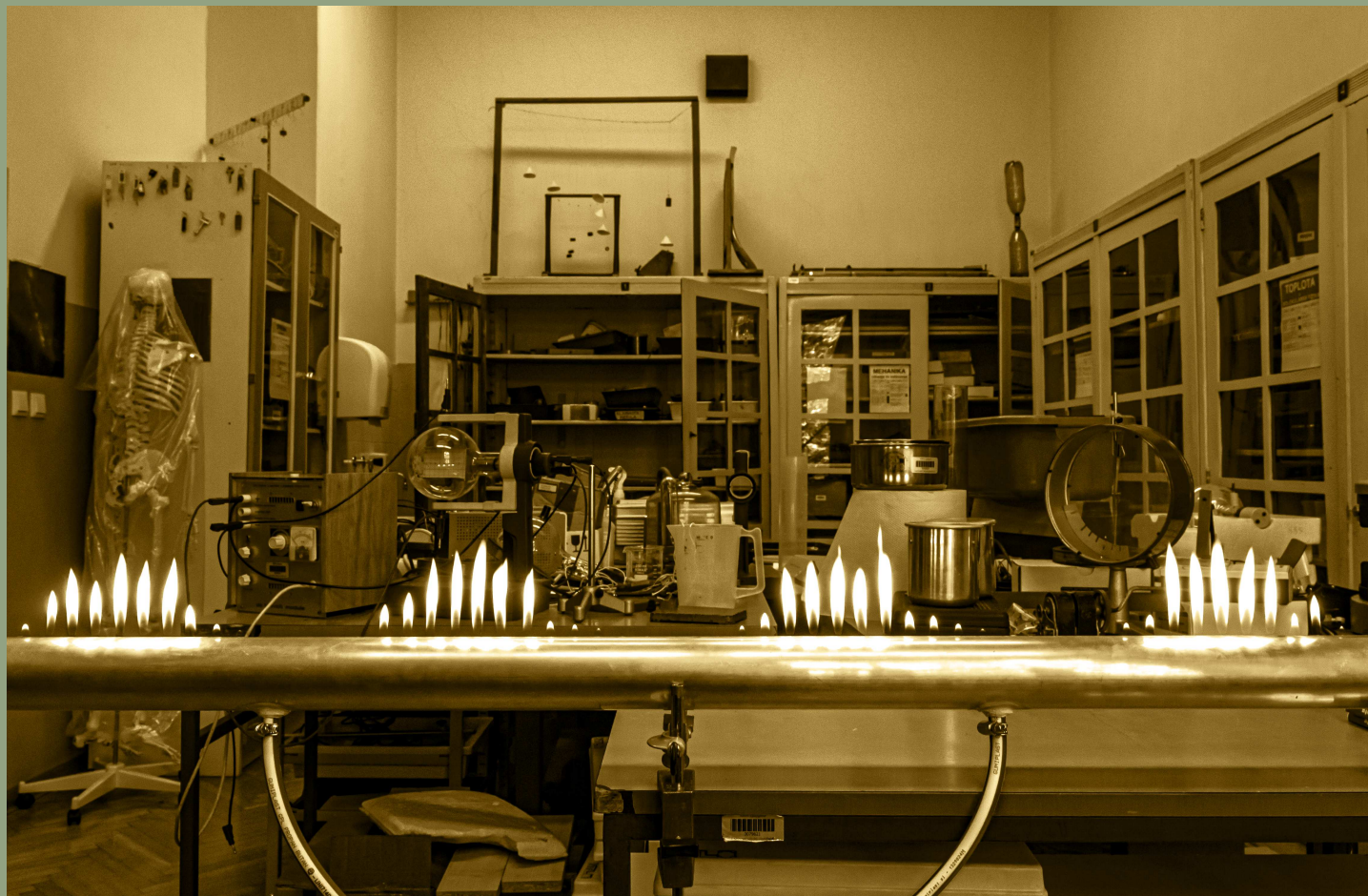


PRESER

#6

MATEMATIKA • FIZIKA • ASTRONOMIJA • RAČUNALNIŠTVO



BISTROUMI
2025

ODSEVI NA
VODNI GLADINI

MESSIERJEV
MARATON
2025

KIRKMANOV
PROBLEM
PETNAJSTIH
ŠOLARK

Kozmični glasovi - nove skladbe po navdihu vesolja



Znano je, da je zgodovina znanosti polna primerov, ko je glasba navdihovala znanstvenike, ali pa so se znanstveniki, ki jih poznamo predvsem po matematiki in fiziki, povsem resno ukvarjali s teorijo glasbe. Eulerjevo prvo delo je bila knjiga o teoriji glasbe Tentamen novae theoriae musicae, Descart je napisal glasbeni priročnik Compendium Musicae, o glasbi so veliko razmišljali tudi Riemann, Kepler in Newton.

Velja pa seveda tudi obratno - znanost je pogosto navdihovala umetnost in jo še vedno navdihuje. V iztekajočem se semestru je sedem astronomov s Fakultete za matematiko in fiziko v Ljubljani sodelovalo s študenti moderne kompozicije na Akademiji za glasbo, ki so iskali navdih za skladbe na temo vesolja. Astronomi so jih sprejeli na fakulteti in zanje pripravili nekaj lekcij o vesolju, pojavih in svojih raziskavah. Študentje pa so te pojme prenesli v svoje kompozicije, ki so bile 31. maja 2025 izvedene na koncertu študentov Studia za sodobno glasbo UL AG. Med izvedbami skladb so člani astronomske skupine publiki na kratko predstavili pojave in raziskave, ki so navdušile vsako kompozicijo. Skladbe, ki so jih prispevali mladi skladatelji Lan Pedletnik Ašič, Maj Brinovec, Tetiana Khoroshun, Jakob Korošec, Enej Lah, Jurij Mušič in Miha Rajterič, so zazvenele nadvse skrivnostno in učinkovito, zato upamo, da bodo našle svojo pot tudi v redne sporede koncertnih dvoran. V uredništvu Preseka pa čestitamo za odlično idejo in projekt vsem, ki so pri njem sodelovali!

× × ×



Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 52, šolsko leto 2024/2025, številka 6

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Nino Bašič (računalništvo), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domajnko, Andrej Guštin (astronomija), Maja Klavžar, Damjan Kobal, Lucijana Kračun Berc (tekmovanja), Boštjan Kuzman (matematika), Peter Legiša, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Marko Razpet, Grega Rihtar (jezikovni pregled), Matjaž Vencelj, Matjaž Zaveršnik.

Dopisi in naročnine: Fakulteta za matematiko in fiziko, Presek, Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana, telefon (01) 4766 558.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: zalozba@fmf.uni-lj.si

Naročnina za šolsko leto 2024/2025 je za posamezne naročnike 25,00 EUR - posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 22,00 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 01100-6030708962.

List sofinancira Javna agencija za znanstvenoraziskovalno in inovacijsko dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založila Fakulteta za matematiko in fiziko

Oblikovanje Lucia Jamnik

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 900 izvodov

© 2025 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije in Fakulteta za matematiko in fiziko

ISSN 2630-4317 (Online), ISSN 0351-6652 (Tiskana izd.)

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Pri-kaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt. Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **Fakulteta za matematiko in fiziko, Presek, Jadranska 19, 1000 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte zalozba@fmf.uni-lj.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvirne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

MATEMATIČNI TRENUTEK

- 2 Kozmični glasovi–nove skladbe po navdihu vesolja

UVODNIK

- 4–5 Matematiki vsepovsod: oskarjevec, papež, predsednik in pozabljena arhitektka
(Boštjan Kuzman)

MATEMATIKA

- 6–8 Kirkmanov problem petnajstih šolark
(Irena Hrastnik Ladinek)

TEKMOVANJA

- 9–12 14. Evropska dekliška matematična olimpijada na Kosovu
(Ana Meta Dolinar, Hugo Trebše)

FIZIKA

- 13–15, 18–21 Odsevi na vodni gladini
(Andrej Likar)

ASTRONOMIJA

- 22–25 Messierjev maraton 2025
(Vid Kavčič, Urban Razpotnik)

RAZVEDRILO

- 16–17 Nagradna križanka
(Marko Bokalič)
- 26 Križne vsote
- 27–29 Bistroumi 2025
(Boštjan Kuzman)
- 30 Bilo je nekoč: Poskusa ob Voltovi obletnici, Presek št. 4, letnik 22 (1994-95)

SLIKA NA NASLOVNICI: Fizikalni kabinet ali Hell's Kitchen?

Pri pouku fizike predstavljajo demonstracijski poskusi pomemben didaktični element, zato so fizikalni kabineti pravzaprav kabineti čudes. Zgodi se, da marsikateri poskus umanjka, zato se je profesor Rok Erman z Vegove srednje šole v Ljubljani spomnil, da bi dijaki četrtih letnikov za zaključek šolanja v skupinah izdelali pripomočke za demonstracije eksperimentov. Pri tem so se soočili z izzivom izvedbe projekta od načrtovanja, nabave materiala do končne izvedbe in demonstracije. Dijaki so se marsikaj naučili, fizikalni kabinet pa je pridobil nekaj novih eksperimentov. Adrian Gal Del Piero, Maks Mahnič, Nejc Kavčič, Bon Vertelj in Ambrož Škulj Kuralt so izdelali atraktivno Rubensovo cev, s katero lahko z gorečimi plamenčki plina prikažemo stoječe valovanje (v ospredju fotografije). Fotografija: Andrej Guštin

Matematiki vsepovsod: oskarjevec, papež, predsednik in pozabljena arhitektka



BOŠTJAN KUZMAN, UREDNIK ZA MATEMATIKO

Ste morda opazili, da so se v zadnjih mesecih v dnevnih novicah skoraj vsak dan pojavljali tudi matematiki? Pregled dogajanja začnimo kar v Hollywoodu. Slovenec **Jernej Barbič**, univerzitetni profesor računalništva v Los Angelesu, sicer pa diplomant ljubljanske fakultete za matematiko in fiziko in nekdanji udeleženec mednarodnih matematičnih olimpijad v Hongkongu in Kanadi leta 1994 oziroma 1995, je 29. aprila na slavnostni podelitvi skupaj s še štirimi sodelavci prejel znameniti zlati kipec Oskar v kategoriji znanstveno-tehniških dosežkov. Program-ska oprema Ziva VFX, ki so jo ustvarili, je sistem za konstruiranje in simulacijo mišic, maščobe, fascije in kože za digitalne like. Orodja Ziva VFX se ponašajo s prefinjenimi funkcijami simulacije in ustvarjanjem likov v realnem času s pomočjo strojnega učenja, s čimer umetnikom omogočajo ustvarjanje vedno bolj natančnih in razširljivih digitalnih likov z večjo učinkovitostjo in nadzorom. Bila so uporabljena v več kot 60 svetovno znanih filmih, kot so *Garfield* (2024), *Godzilla in Kong: Novi imperij* (2024), *Aquaman* in *izgubljeno kraljestvo* (2023), *Venom 2* (2021), *Stonica Marvel* (2019), *Belline* pasje dogodivščine (2019), *Jumanji: Naslednja stopnja* (2019) in *Megalodon: Predator iz globin* (2018).

Nadaljujmo v Evropi. Po smrti in slovesu od papeža Frančiška v mesecu aprilu je bilo veliko pozornosti usmerjene v volitve novega papeža. Beli dim je 8. maja prinesel novico, da bo novi papež Američan **Robert Prevost**, ki si je izbral papeško ime Leon XIV. Razkritje, da je Robert Prevost na katoliški univerzi Villanova zaključil dodiplomski študij matematike in nekaj let tudi poučeval matematiko in fiziko v srednji šoli, preden se je povsem posvetil teologiji, je v akademsko-znanstvenih krogih povzročilo veliko

simpatij in tudi muzanja o tem, da bodo lahko na fakultetah študentkam in študentom matematike kot možno karierno pot poleg programerja, učitelja ali finančnika odslej ponujali tudi poklic papeža.

Morda še bolj presenetljiva je bila nato novica iz Romunije. Tam je v drugem krogu predsedniških volitev 18. maja zmagal 55-letni **Nicușor Dan**, ki je v letih 1987 in 1988 kot član romunske ekipe nastopil na mednarodnih matematičnih olimpijadah na Kubi in v Avstraliji. Pa ne le nastopil, obakrat je osvojil absolutno prvo mesto in zlato medaljo z vsemi možnimi točkami. Po študiju matematike je leta 1998 doktoriral na ugledni francoski univerzi Université Paris Nord, nato pa se je vrnil v Romunijo, kjer je bil v Bukarešti med ustanovitelji normalke - visoke šole, namenjene magistrskemu študiju najboljših študentov. Tam je vrsto let predaval matematiko in začel delovati v civilno-družbenih gibanjih za ohranitev mestnih znamenitosti. Leta 2020 je v tretjem poskusu postal tudi prvi neodvisni župan glavnega mesta Bukarešta, po uspešnem mandatu pa je bil za župana znova izvoljen leta 2024, a se je namesto tega odločil kar za predsedniško kandidaturo. Kako bodo znanja kombinatorike, geometrije in teorije števil vplivala na njegovo vodenje države, bo pokazal čas, matematiki pa gotovo želimo vse najboljše njemu in njegovim državljanom.

Praznovanje 80. obletnice konca druge svetovne vojne v mesecu maju pa je sovpadlo tudi z dnevom žensk v matematiki, zato namenimo nekaj besed še skoraj neznani slovenski matematičarki. **Jožica Strašek** (1914-2015) je diplomirala iz matematike in fizike na Filozofski fakulteti v Ljubljani leta 1938, po nekaj letih poučevanja na ljubljanskih gimnazijah pa je med drugo svetovno vojno vpisala še študij ar-

hitekture. Leta 1944 je bila internirana v zlovesče nacistično žensko taborišče Ravensbrück, v katerem je ob koncu vojne z odločnim posredovanjem rešila življenje 68 taboriščnic, za kar je prejela tudi državno odlikovanje. Še kot študentka arhitekture je bila v letih 1946-1951 glavna sodelavka arhitekta Edvarda Ravnikarja na več nagradnih natečajih, kjer je pokazala izjemno sposobnost v tehničnem in oblikovnem izražanju. Postala je prva ženska asistentka na oddelku za arhitekturo v Ljubljani, a je že leta 1952 odšla v tujino. V Belgiji je nato vrsto let delala za vrhunske arhitekturne biroje, kasneje znova poučevala matematiko v Švici, v Slovenijo pa se je vrnila šele po upokojitvi. Njena fascinantna življenj-

ska zgodba je bila šele nedavno predstavljena na razstavi o delu spregledanih slovenskih arhitektk v Ljubljani.

Lepo je brati raznovrstne pozitivne zgodbe o matematikih in matematičarkah. Upam, da kakšno lepo novo zgodbo že letos poleti spišejo tudi mladi, ki se bodo udeležili mednarodnih olimpijad iz matematike v Avstraliji, fizike v Nemčiji, astronomije v Indiji in ekonomije v Azerbajdžanu. Kdo ve, kaj bomo o njih brali v novicah čez dvajset let. Medtem pa naj bo vaše poletje prijetno in ravno prav matematično. Nasvidenje jeseni!



SLIKA 1.

Slovenska ekipa na matematični olimpijadi v Torontu leta 1995, letošnji prejemnik Oskarja v kategoriji znanstveno-tehničnih dosežkov Jernej Barbič je drugi z leve.

× × ×

Kirkmanov problem petnajstih šolark



IRENA HRASTNIK LADINEK

→ Predstavljajte si, da ste prostovoljec na poletnem letovanju otrok. Vsak dan jih morate razdeliti v ustvarjalne skupine, pri čemer želite, da se otroci med seboj čim bolje spoznajo. To pomeni, da bi moral biti vsak par otrok vsaj enkrat v isti skupini. Kako jih razvrstiti?

Podoben izziv je že leta 1850 predlagal angleški matematik Thomas P. Kirkman, ko je v angleški družabni reviji *Lady's and Gentleman's Diary* objavil naslednjo nalogo:

Petnajst šolark se vsak dan v tednu odpravi na sprehod v petih vrstah po tri. Ali lahko uredimo šolarke tako, da bosta vsaki dve hodili v isti vrsti natanko en dan v tednu?

To vprašanje je danes znano kot Kirkmanov problem petnajstih šolark. Razmislimo. Ker ima teden sedem dni in ker se vsak dan organizira sprehod s petimi vrstami po tri, šolarke skupaj oblikujejo 35 vrst oziroma 35 trojk. Problem bo rešen, če lahko te trojke izberemo tako, da se vsak par šolark pojavi v natanko eni trojki. Poleg tega je treba te trojke ločiti na sedem skupin po pet trojk tako, da vsaka skupina vsebuje vseh petnajst šolark. Tedaj vsaka skupina ustreza enemu dnevu v tednu, njenih pet trojk pa določa razporeditev šolark izbranega dne.

Splošneje: Kirkmanov sistem trojk reda n je množica 3-elementnih podmnožic množice $\{1, 2, \dots, n\}$, ki zadošča naslednjima pogojema:

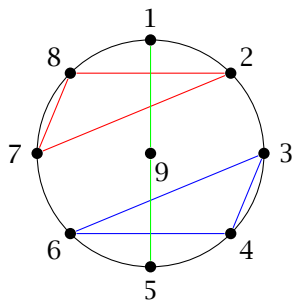
- 1) Vsak par različnih elementov je vsebovan v natanko eni 3-elementni podmnožici te množice.
- 2) Obstaja razbitje te množice na več podmnožic, pri katerem je vsak element razbitja tudi razbitje množice $\{1, 2, \dots, n\}$.

Elementom množice $\{1, 2, \dots, n\}$ pravimo točke, 3-elementnim podmnožicam trojke, podmnožicam, ki predstavljajo razbitje množice $\{1, 2, \dots, n\}$, pa skupine. Raziščimo nekaj lastnosti takega sistema.

Koliko je vseh parov točk? Vsaka točka je v paru z $n - 1$ drugimi točkami. Skupno število parov je torej $\frac{n(n-1)}{2}$, saj vrstni red točk v paru ni pomemben. Kolikokrat se pojavi vsaka točka? Vsaka točka se v posamezni trojki pojavi v natanko dveh različnih parih (vsaka trojka vsebuje tri različne pare). Ker je vsaka točka v paru z $n - 1$ drugimi točkami, se vsaka točka pojavi v $\frac{n-1}{2}$ trojkah. Zato mora biti n liho število. Koliko je vseh trojk? Ker vsaka trojka vsebuje tri različne pare in ker so ti pari pokriti z natanko eno trojko, je skupno število trojk $\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{3} = \frac{n(n-1)}{6}$. To število je celo, kadar je $n(n - 1)$ deljivo s 6. Ker je n liho, je $n = 6t + 1$ ali $6t + 3$ za neko nenegativno celo število t . Poleg tega mora biti n deljivo s 3, saj vsaka skupina vsebuje le trojke, ki predstavljajo razbitje množice $\{1, 2, \dots, n\}$. To pa je mogoče le, če je $n = 6t + 3$. Pravzaprav velja: Kirkmanov sistem trojk obstaja natanko tedaj, ko je $n = 6t + 3$ za nek $t \in \mathbb{N}_0$; torej za $n = 3, 9, 15, 21, \dots$. Ta trditev je bila v celoti dokazana šele leta 1968. Ker je dokaz obsežen, ga najdeš v [4].

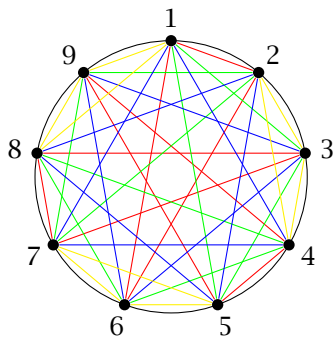
Najprej si pogledjmo primer s tremi in devetimi dekleti. Tri dekleta se v trojici sprehajajo le en dan – ta primer je trivialen. Sistem z devetimi dekleti vsebuje $\frac{9(9-1)}{6} = 12$ trojk, ki se dajo razdeliti v 4 skupine po 3 trojke. S poskušanjem in nekaj strategije bi tak sistem lahko zapisali. Lotimo se tega z geometrijskim pristopom, ki ga je objavil Martin Gardner v [2].

Narišimo krožnico in jo razdelimo na osem enakih delov, ki jih označimo s števili od 1 do 8, središče pa z 9. Označene točke predstavljajo različna dekleta, razporeditev v trojke za prvi dan pa predstavljata trikotnika $\{2, 7, 8\}$ in $\{3, 4, 6\}$ ter premer $\{1, 5, 9\}$, glej sliko 1. Z vrtenjem za en korak v smeri urnega ka-



SLIKA 1.

Tri trojke, ki dajo razporeditev sprehodov za prvi dan.



SLIKA 2.

Kirkmanov sistem na devetih točkah

zalca dobimo razporeditev v nove trojke za naslednji dan. To lahko ponovimo še dvakrat, potem se ponovi začetna razporeditev. Tako smo dobili 4 razporeditve za štiri dni:

Prvi dan:	Drugi dan:	Tretji dan:	Četrty dan:
{1,5,9}	{2,6,9}	{3,7,9}	{4,8,9}
{2,7,8}	{1,3,8}	{1,2,4}	{2,3,5}
{3,4,6}	{4,5,7}	{5,6,8}	{1,6,7}

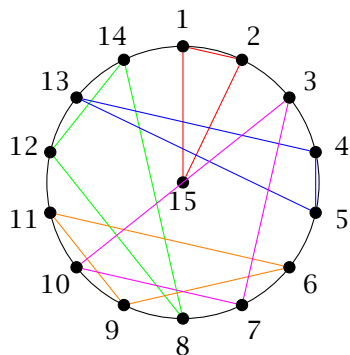
Kaj pa, če točke na obeh krožnicah oštevilčimo v nasprotnem vrstnem redu, torej od 8 do 1, pri čemer središče še vedno označimo z 9? Dobimo:

Prvi dan:	Drugi dan:	Tretji dan:	Četrty dan:
{4,8,9}	{3,7,9}	{2,6,9}	{1,5,9}
{1,2,7}	{1,6,8}	{5,7,8}	{4,6,7}
{3,5,6}	{2,4,5}	{1,3,4}	{2,3,8}

Ker smo ta sistem dobili zgolj s preimenovanjem števil (tj. permutacijo števil), struktura razporeditve ostaja enaka. Pravimo, da sta rešitvi izomorfni. Struktura se ohrani tudi, če preuredimo vrstni red dni ali zamenjamo vrstni red trojk znotraj posameznega dne. Kirkmanov problem devetih šolarj ima le eno osnovno rešitev – katero koli drugo rešitev lahko s primerno permutacijo števil, dni ali trojk preoblikujemo v osnovno obliko. Nariši še kak vzorec in razmisli, ali z vrtenjem dobiš Kirkmanov sistem.

Oglejmo si še drugo geometrijsko ponazoritev tega sistema (slika 2). V tem primeru je vsak dan

predstavljen z naborom treh trikotnikov enake barve, katerih oglišča predstavljajo tri trojke. Na primer, urnik sprehodov za prvi dan določajo oglišča modrih trikotnikov. S pomočjo te ponazoritve lahko jasno vidimo, kako so trojke razporejene po dnevih, hkrati pa enostavno preverimo, da se vsak par deklet pojavi v natanko eni trojki.



SLIKA 3.

Pet trojk, ki dajo razporeditev sprehodov petnajstih šolarj za prvi dan.



→

Prvi dan:	Drugi dan:	Tretji dan:	Četrty dan:	Peti dan:	Šesti dan:	Sedmi dan:
{1,2,15}	{3,4,15}	{5,6,15}	{7,8,15}	{9,10,15}	{11,12,15}	{13,14,15}
{3,7,10}	{5,9,12}	{7,11,14}	{2,9,13}	{1,4,11}	{3,6,13}	{1,5,8}
{4,5,13}	{1,6,7}	{3,8,9}	{5,10,11}	{7,12,13}	{1,9,14}	{2,3,11}
{6,9,11}	{8,11,13}	{1,10,13}	{1,3,12}	{3,5,14}	{2,5,7}	{4,7,9}
{8,12,14}	{2,10,14}	{2,4,12}	{4,6,14}	{2,6,8}	{4,8,10}	{6,10,12}

Sedaj pa preidimo na Kirkmanov problem petnajstih šolark. Že leta 1922 je bilo znano, da ima ta problem sedem osnovnih rešitev. To pomeni, da je vsaka rešitev izomorfna eni izmed teh. Ogledaš si jih lahko na primer na Wikipediji [3].

Spet si bomo pomagali z geometrijsko metodo. Na sliki 3 je prikazana razporeditev petih trikotnikov, ki dajo urnik sprehodov za prvi dan:

$\{1, 2, 15\}, \{3, 7, 10\}, \{4, 5, 13\}, \{6, 9, 11\}, \{8, 12, 14\}.$

V tem primeru je treba trikotnike še šestkrat zavr-
teti za dva koraka v smeri urnega kazalca. V vsa-
kem položaju oglišča trikotnikov določajo novih pet
trojk. Pomembno je, da v začetni razvrstitvi nobena
dva trikotnika nista skladna, saj bi se sicer določene
trojke ponovile. Tako lahko narišemo sedem različ-
nih vzorcev trikotnikov, ki ustrezajo sedmim osnov-
nim rešitvam problema.

Rešitev za vzorec na sliki 3 je podana na zgornjem
seznamu:

Čeprav so Kirkmanovi sistemi že dolgo klasična
tema v kombinatoriki, še vedno obstajajo številna
odprta vprašanja in neraziskana področja. Še vedno
ne poznamo konstrukcijske metode, ki bi delovala za
vsako število n oblike $n = 6t + 3$. Poleg tega tudi za
razmeroma majhne vrednosti n še vedno ni znano
število osnovnih rešitev. Število vseh rešitev (tudi
izomorfnih) namreč z rastjo n izredno hitro narašča
– za $n = 15$ jih je več kot $4 \cdot 10^{11}$. Zato je določanje
osnovnih rešitev izjemno zahtevno.

Literatura

[1] P. J. Cameron, *Notes on Combinatorics*,
[https://webpace.maths.qmul.ac.uk/
p.j.cameron/notes/comb.pdf](https://webpace.maths.qmul.ac.uk/p.j.cameron/notes/comb.pdf).
Povzeto 25.3.2025.

[2] M. Gardner, *Mathematical games*, Scientific
American, vol. 243, no. 5, 1980.

[3] *Kirkman's schoolgirl problem*,
`\detokenize{https://en.wikipedia.org/
wiki/Kirkman}}\\url{\%27s_schoolgirl_
problem}`.
Povzeto 25.3.2025.

[4] D. K. Ray-Chaudhuri, R. M. Wilson, *Solution of
Kirkman's schoolgirl problem*, Proc. Symp. Pure
Math. 19, 187 – 204, 1971.

× × ×

Uganki

↓↓↓

UREDNIŠTVO

→

1. Žena je povedala prijateljici o starosti svojega
moža sledeče:
- starejši je od mene,
 - razlika števila njegovih in mojih let je enaka
enajstini vsote števila mojih in njegovih let,
 - število njegovih let dobiš, če zamenjaš števki
v številu mojih let.
- Bi znali ugotoviti starost moža?
2. Sto jabolk razdelimo med sto ljudi. Moški do-
bijo po tri jabolka, ženske po dva in otroci po
polovico. Žensk je petkrat več kot moških. Ko-
liko je otrok v skupini?

× × ×

www.presek.si

www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/

14. Evropska dekliška matematična olimpijada na Kosovu

↓↓↓

ANA META DOLINAR IN HUGO TREBŠE

→ Med 11. in 17. aprilom je v Prištini potekala 14. Evropska dekliška matematična olimpijada (EGMO). Slovenske tekmovalke so bile Sara Ferreira (Gimnazija Škofja Loka), Ekaterina Chizhova, Patricia Király (obe Gimnazija Bežigrad) ter Naja Oblak (Gimnazija Vič). Spremljevalca ekipe sta bila Ana Meta Dolinar in Hugo Trebše.



SLIKA 1.

Ekipa s spremljevalcema (Ana Meta, Ekaterina, Sara, Patricia, Naja, Hugo)

Slovenija se je odlično odrezala in prvič v zgodovini osvojila kar **dve srebrni medalji** – s Kosova sta se z njima vrnili Ekaterina in Patricia. Obe sta v celoti rešili tri naloge od šestih in poleg tega pridobili tudi delne točke na preostalih nalogah. Ekaterina je osvojila 17. mesto med vsemi 135 Evropejkami, Patricia pa 23. mesto. To sta **najboljši individualni uvrstitvi Slovenk, odkar sodelujemo na olimpijadi EGMO**. Uspeh sta dopolnili Naja in Sara, ki sta s popolno rešitvijo vsaj ene naloge osvojili pohvalo. Slovenija je tako po skupnem dosežku 15. med 35 evropskimi državami.

Letos so se naloge izkazale za precej težke, in iz-



SLIKA 2.

Ekaterina s srebrno medaljo.

med 219 tekmovalk iz 56 držav jih je le ena uspela rešiti vseh šest. Po skupnem seštevku točk celotne ekipe je bila prva Kitajska, med evropskimi državami pa je prvič zmagala Italija.

Tekmovalke so dva dni po 4 ure in pol reševale 6 nalog. Poleg tekmovanja so imele organiziranih tudi več različnih družabnih dejavnosti ter ekskurzijo v zgodovinsko mesto Prizren.

Najbolje reševana naloga je bila četrta (geometrija). **Le 25 deklet je uspelo rešiti peto nalogo, med njimi tudi Patricia.** Naloga z rešitvijo je vključena v nadaljevanju članka.

Poleg ekipe so slovensko delegacijo sestavljali še koordinatorji Lenart Dolinar, Lovro Drofenik in Luka Horjak, ki so s strani organizatorjev pomagali pri nepristranskem ocenjevanju nalog.

1. naloga

Za naravno število N naj bodo $c_1 < c_2 < \dots < c_m$ vsa naravna števila manjša od N , ki so tuja N . Poišči vse $N \geq 3$, za katere velja

$$\square D(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$





SLIKA 3.
Patricia z maskoto med tekmovanjem

za vsak $1 \leq i \leq m - 1$.

Izraz $D(a, b)$ predstavlja največje naravno število, ki deli a in b . Celi števili a in b sta si tuji, če je $D(a, b) = 1$.

Rešitev

S poskušanjem na manjših primerih ter z nekaj intuicije pridemo do domneve, da pogoju naloge zadostčajo natanko vsa soda števila in vse popolne potence števila 3.

Če je N sodo število, so vsa števila c_i liha. Ker je vsota dveh lihih števil soda, sledi $2 \mid D(N, c_i + c_{i+1})$ za vse i . Največji skupni delitelj je zato večji od 1.

Obravnavajmo primer, ko je $N = 3^k$ za nek $k \geq 1$. Tedaj so števila med 1 ter N , ki so tuja N , natanko števila, ki niso deljiva s 3. V tabeli na dnu strani zapišimo člene c_i ter njihove ostanke pri deljenju s 3.

Opazimo, da sta zaporedna člena niza $\{c_i\}$ po modulu 3 vedno 1 in 2 (v nekem vrstnem redu), kar pomeni, da je njuna vsota zagotovo deljiva s 3. Sledi, da vsota katerihkoli zaporednih členov zaporedja ni tuja N , saj je N tudi deljiv s 3.

Sedaj pokažimo, da ostala naravna števila ne izpolnjujejo pogoja. Denimo, da obstaja liho število N , ki ni potenca števila 3, a izpolnjuje pogoj naloge.

i	1	2	3	4	5	6	7	...	$m - 1$	m
c_i	1	2	4	5	7	8	10	...	$N - 2$	$N - 1$
$c_i \pmod 3$	1	2	1	2	1	2	1	...	1	2

Ker je N liho število, je $c_1 = 1$ ter $c_2 = 2$, zato velja

■ $1 \neq D(N, c_1 + c_2) = D(N, 1 + 2) = D(N, 3),$

kar pomeni, da $3 \mid N$. Sledi, da mora biti N oblike $N = 3^k \cdot M$, kjer je $M > 1$ ter $3 \nmid M$. Ločimo dva primera glede na ostanek števila M pri deljenju s 3.

Primer 2.1: Če je $M \equiv 1 \pmod 3$, sta števili $M + 1$ ter $M - 2$ tuji N . Obe števili nista deljivi s 3, če pa bi bili deljivi s katerimkoli praštevilskim deliteljem p števila M , bi tak p delil tudi 1 ali -2 . To bi bilo mogoče le v primeru sodega praštevilskega delitelja, kar pa je v protislovju s predpostavljeno lihostjo N . Ker sta M ter $M - 1$ zaporedoma deljivi z M ter s 3, M in $M - 1$ nista tuji N , torej sta $M - 2$ ter $M + 1$ zaporedna elementa niza $\{c_i\}$. Njuna vsota je enaka $2M - 1$, kar ni deljivo s 3, prav tako pa po podobnem razmisleku kot pri $M - 2$ ter $M + 1$ ni deljivo s katerimkoli praštevilskim deliteljem p števila M . Sledi, da je vsota zaporednih členov zaporedja tuja N , zato N predpisane oblike ne ustreza pogojem naloge.

Primer 2.2: Če je $M \equiv -1 \pmod 3$, sta števili $M + 2$ ter $M - 1$ tuji N . Podoben razmislek kot v primeru 2.1 poda, da sta števili zaporedna elementa niza, ter da je njuna vsota tuja N . Tako dosežemo željeno protislovje.

5. naloga

Naj bo $n > 1$ naravno število. Pri konfiguraciji plošče velikosti $n \times n$ vsako izmed n^2 polj vsebuje puščico, ki kaže gor, dol, levo ali desno. Pri dani začetni konfiguraciji polž Turbo začne v enem izmed polj in se premika iz polja v polje. Pri vsakem premiku se Turbo premakne eno dolžinsko enoto (enako dolžini stranice polja) v smeri, določeni s puščico na polju, kjer se Turbo trenutno nahaja (po možnosti se pri tem premakne izven plošče). Po vsakem premiku se puščice v vseh poljih zavrtijo za 90° v nasprotni smeri urnega kazalca. Pravimo, da je polje *imenitno*, če Turbo začnši v tem polju vsako polje plošče obišče natanko enkrat in se na koncu vrne v začetno polje, ne da bi zapustil ploščo. V odvisnosti od n poišči največje možno število imenitnih polj, ki so lahko na plošči.

Rešitev

Pokazali bomo, da je največje možno število imenitnih celic čez vse konfiguracije enako:

- $\frac{n^2}{4}$, če je n sodo število, ter
- 0, če je n liho število.

Lihi n

Najprej pokažemo, da je število imenitnih polj enako 0, če je n liho število. Denimo, da obstaja vsaj eno imenitno polje v neki konfiguraciji. Pobarvajmo ploščo $n \times n$ kot šahovnico, tako da je imenitno polje bele barve.

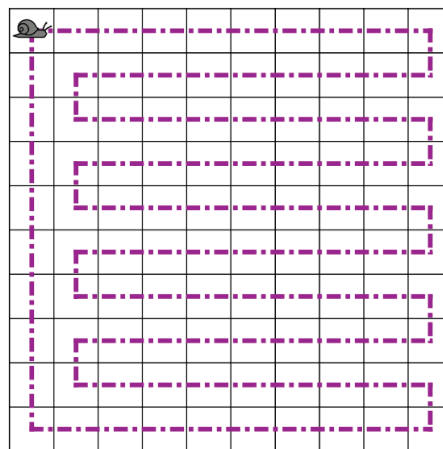
Ker Turbo obišče vsako polje natanko enkrat ter se nato vrne v začetno imenitno polje, Turbo naredi natanko n^2 premikov. Opazimo, da se po prvem premiku Turbo nahaja v črnem polju, po drugem je nazaj v nekem belem polju, ter v splošnem, da je po liho mnogo premikov Turbo v črnem polju, po sodo mnogo premikov pa v belem polju. Ker je n liho, je n^2 tudi liho, zato se mora po svojem zadnjem premiku Turbo nahajati v črnem polju. To pa ni mogoče, saj se po predpostavki Turbo vrne v svoje začetno polje, ki je bele barve.

Spodnja meja za sodi n

Konstruirali bomo začetno konfiguracijo, ki ima $\frac{n^2}{4}$ imenitnih polj.

Naj bo (i, j) polje v vrstici i in stolpcu j . Oglejmo si naslednji cikel:

- $(1, 1) \rightarrow (1, 2) \rightarrow (1, 3) \rightarrow \dots \rightarrow (1, n)$
 $\rightarrow (2, n) \rightarrow (2, n-1) \rightarrow \dots \rightarrow (2, 2)$
 $\dots$
 $\rightarrow (2i-1, 2) \rightarrow (2i-1, 3) \rightarrow \dots \rightarrow (2i-1, n)$
 $\rightarrow (2i, n) \rightarrow (2i, n-1) \rightarrow \dots \rightarrow (2i, 2)$
 $\dots$
 $\rightarrow (n, n) \rightarrow (n, n-1) \rightarrow \dots \rightarrow (n, 2)$
 $\rightarrow (n, 1) \rightarrow (n-1, 1) \rightarrow \dots \rightarrow (2, 1) \rightarrow (1, 1)$



Opazimo, da se ta cikel vrne v začetno polje, potem ko vsako polje obišče natanko enkrat. Da bi pokazali imenitnost polja $(1, 1)$, moramo najti začetno konfiguracijo, v kateri Turbo sledi predstavljenemu ciklu.

Naj bo c_i $(i-1)$ -to polje na ciklu: torej $c_0 = (1, 1)$, $c_1 = (1, 2)$, ..., $c_{n^2-1} = (2, 1)$. Za vsak i usmerimo puščico v polju c_i proti polju c_{i+1} (ali proti c_0 , če je $i = n^2 - 1$), nato pa to puščico zavrtimo i -krat za 90° v smeri urnega kazalca. Po i premikih bo puščica v c_i zavrnjena i -krat za 90° v nasprotni smeri urnega kazalca. Torej bo takrat, ko bo Turbo na tistem polju, puščica kazala ravno v smeri koraka, ki sledi ciklu. Turbo tako prepotuje opisani cikel, kar pomeni, da je $(1, 1)$ imenitno.

Po štirih zaporednih premikih bodo vse puščice znova usmerjene enako, kot so bile na začetku.

Dolžina cikla n^2 deljiva s 4 (saj je kvadrat sodega števila vedno deljiv s 4), torej se plošča po celotnem ciklu povrne v začetno konfiguracijo.

To pomeni, da če Turbo začne v kateremkoli polju c_i na tem ciklu, za katerega velja $4 \mid i$, ga bodo puščice vedno usmerile po isti poti kot v originalnem ciklu. Ko se vrne na prvo polje, bo pozicija puščic natanko takšna, kot na začetku originalnega cikla, zato lahko nadaljuje, dokler ne prehodi cikla dolžine n^2 .

Torej so vsa polja

- $c_0, c_4, c_8, \dots, c_{n^2-4}$

imenitna, kar pomeni, da jih je vsaj $\frac{n^2}{4}$.





Zgornja meja za sodi n

Dokazali bomo, da za sodi n in katerokoli začetno konfiguracijo obstaja največ $\frac{n^2}{4}$ imenitnih polj.

Naj bo a_0 imenitno polje. Naj bo $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n^2-1}, a_{n^2} = a_0$ zaporedje polj, ki jih Turbo obišče, začnši v a_0 . Med temi polji je zagotovo imenitno vsaj vsako četrto, torej skupaj vsaj $\frac{n^2}{4}$.

Sedaj predpostavimo, da obstaja neko imenitno polje b_0 , ki ni med polji $a_0, a_4, a_8, \dots, a_{n^2-4}$, torej imamo skupaj več kot $\frac{n^2}{4}$ imenitnih polj. Naj bo cikel, ki ga Turbo preleze začnši v b_0 , zaporedje polj $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n^2-1}, b_{n^2} = b_0$. Imenitna polja med njimi so zagotovo vsa polja b_i z $i \mid 4$.

Poglejmo si, ali je mogoče, da bi imeli množici polj $a_0, a_4, a_8, \dots, a_{n^2-4}$ ter $b_0, b_4, b_8, \dots, b_{n^2-4}$ katerikoli skupni element (recimo a_j in b_k). Potem bi to pomenilo, da se cikel $a_j, a_{j+1}, \dots$ in cikel $b_k, b_{k+1}, \dots$ začneta v istem polju in z isto konfiguracijo puščic. To pa pomeni, da bodo na vsakem koraku puščice pri obeh ciklih kazale v isto smer in cikla bosta identična. Potem bodo identične tudi lokacije vseh preostalih $\frac{n^2}{4} - 1$ imenitnih polje, iz tega pa sledi, da je b_0 med polji $a_0, a_4, a_8, \dots, a_{n^2-4}$. Prišli smo do protislovja, kar pomeni, da je presek imenitnih polj iz cikla a ter imenitnih polj iz cikla b prazna množica.

Opazimo, da ker je $4 \mid n^2$, bodo puščice po n^2 korakih ponovno v začetni konfiguraciji. Če bi Turbo nadaljeval s premikanjem po vrnitvi v začetno polje, bi vedno le ponavljal isti cikel.

Poglejmo si zgornje levo polje $(1, 1)$. To polje ima le dve sosednji polji, zato morata tako pot a kot pot b vključevati polja $(2, 1)$ (eno dol), $(1, 1)$ in $(1, 2)$ (eno desno) v določenem vrstnem redu, bodisi

$$(2, 1) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (1, 2)$$

bodisi

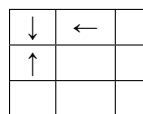
$$(1, 2) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (2, 1).$$

Brez škode za splošnost predpostavimo, da je $a_{i-1} = (2, 1)$, $a_i = (1, 1)$ in $a_{i+1} = (1, 2)$ za nek i .

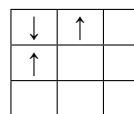
Naj bo j tak, da je $b_j = (1, 1)$. Če velja $b_{j-1} = (2, 1) = a_{i-1}$, potem mora biti puščica v $(2, 1)$ usmerjena enako po $i - 1$ in po $j - 1$ korakih, torej $i \equiv j \pmod{4}$. Sledi, da se tudi puščice v $(1, 1)$ in v naslednjih poljih ujemajo, kar pomeni, da sta poti a in b enaki (le z zamikom indeksov za večkratnik števila 4), kar pa po naši predpostavki za a in b ne velja.

Preostane nam možnost, da poti a in b kot plošče preideta v različnih smereh, torej $b_{j+1} = (2, 1) = a_{i-1}$.

Da lahko kot preide pot a , morajo biti puščice v kotu po $i - 1$ korakih v enem izmed naslednjih dveh položajev:

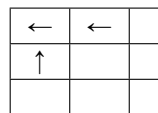


ali

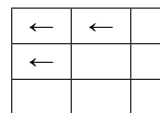


Puščica v polju $(2, 1) = a_{i-1}$ mora namreč kazati navzgor. En korak kasneje mora puščica v kotu kazati desno, zato trenutno kaže navzdol. Puščica v $(1, 2)$ pa mora po dveh korakih kazati dol ali desno, zato trenutno kaže gor ali levo.

Hkrati pa mora konfiguracija v kotu tudi biti takšna, da jo pot b preide v drugi smeri. Po podobnem premisleku dobimo naslednji dve možnosti za puščice v kotu po $j - 1$ premikih:



ali



Najti moramo torej takšno usmerjenost kotnih puščic, kjer za nek i in j obstaja rotacija, ki eno izmed zgornjih dveh možnosti zavrti v eno izmed spodnjih dveh možnosti.

To pa ni mogoče. Opazimo lahko na primer, da poti b zadoščajo le takšne konfiguracije, kjer sta zgornji dve puščici obrnjeni v isto smer (ne glede na to, kolikokrat ju zavrtimo za 90° , bosta še vedno enako usmerjeni). To pa ne velja za nobeno izmed možnosti za pot a . To pomeni, da ne obstaja takšna postavitev puščic v kotu, da bi jo lahko dve različni poti prešli v nasprotnih smereh.

Cikel b , ki ni enak ciklu a , torej ne more obstajati.

Iz tega sledi, da so lahko imenitna le polja oblike a_{4t} za $t = 0, 1, \dots, \frac{n^2}{4} - 1$, kar pomeni največ $\frac{n^2}{4}$ imenitnih polj.

Vir nalog, kjer lahko zainteresirani bralci najdejo tudi preostale naloge s tekmovanja, je povezava <https://www.egmo.org/egmos/egmo14/>. Prvo nalogo je predlagala Litva, peto pa Turčija.

× × ×

Odsevi na vodni gladini

↓↓↓

ANDREJ LIKAR

→ Gladina vode v jezerih ali na morju skoraj nikoli ni povsem ravna, po njej se podijo manjši ali večji valovi. Le v zelo redkih primerih njihova gladina spominja na ravno zrcalo. En tak primer se mi je vtisnil v spomin ob obisku solnega rudnika v okolici Salzburga v Avstriji. Gladina podzemnega jezera, ki je bilo okoli in okoli obdano s svetilkami, je bila povsem mirna, da so se svetilke jasno zrcalile v njej. Prizor je bil do te mere nenavaden, da sem potreboval kar nekaj časa, da sem dojel, kaj gledam. V rudniku seveda ni vetra, ki bi gladino vzvaloval, k čarobnosti prizora pa je pripomogla tudi šibka osvetljenost podzemne dvorane.



SLIKA 1.

Odsev ograje na vodni gladini.

Na ne preveč razburkani gladini odsevi pričarajo zanimive podobe. Nekaj takih je prikazanih na slikah 1, 2 in 3. Posneli smo jih na morju in na mrtvem rokavu Ljubljanske v Produ na Vevčah. Prod je obsežno nenaseljeno travniško območje blizu Ljubljane. Ker Ljubljanska tam kdaj pa kdaj poplavlja, ga je obvarovala naselij in prometnih cest. Na sredi Proda tako ne vidite ne hiš ne električnih drogov, le travnike in drevje, v ozadju pa z gozdom prekrit Debni vrh.



SLIKA 2.

Odsev rastja na vodni gladini.



SLIKA 3.

Odsev dreves na vodni gladini.

Na sliki 4 vidimo odsev jamborov na rahlo vzvalovani morski gladini.

Ker gre pri odsevu za preprosto fiziko odboja svetlobe, nas mika, da bi odsev narisali z računalnikom. Nakodranost gladine bi tako po želji spreminjali in prišli do odsevov, ki jih na gladini v naravi nikoli ne bi mogli videti.

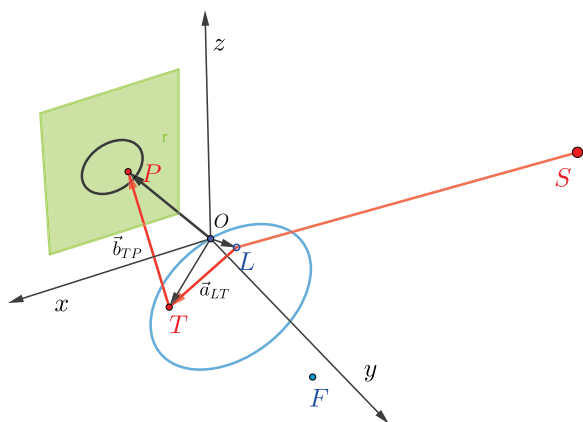
Zasnova programa je preprosta. Na eno stran neravnega zrcala postavimo kako zanimivo podobo (P), na drugo pa zbiralno lečo (L), ki od zrcala (T) odbite žarke preslika v točko (S) na zaslonu, kot je to prikazano na sliki 5. Zrcalo postavimo vodoravno med podobo in lečo.





SLIKA 4.

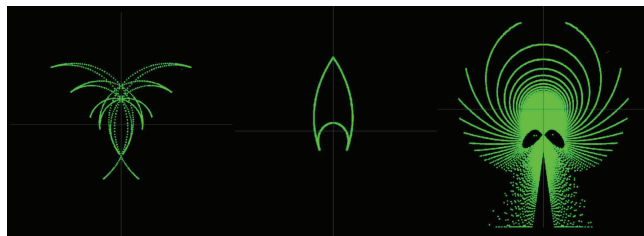
Odsev jadrnic na morski gladini. Jambori v odsevu niso ravni (fotografija Petra Legiša).



SLIKA 5.

Postavitev sistema za računalniško predstavitev odseva.

Za lažjo predstavo vpeljemo prostorski koordinatni sistem z osmi x , y in z . Slednja (z) kaže navpično navzgor, ostali dve pa ležita v vodoravni ravnini. Zrcalo torej položimo na ravnino (x,y) , sega naj od slike do leče. Če je zrcalo ravno, se bodo vsi žarki, ki izhajajo iz točke P na sliki in se odbijejo od zrcala, zbrali v točki S na zaslonu, ne glede na to, kje so se odbili



SLIKA 6.

Pri upodobitvi z zelo veliko lečo se točka po odboju od neravnega zrcala preslika v zanimive figure. Prikazani so trije nenavadni primeri.

od zrcala. Pri tem privzamemo, da je leča idealna, dovolj velika in postavljena tako, da prestrežene odbite žarke preslika v točko. Pri pravi leči bi to veljalo le za obosne žarke.

Pri neravnem zrcalu pa dobimo na zaslonu vse prej kot le točko. Za nekaj preprostih oblik valovitega zrcala dobimo na zaslonu namesto točke prav nepričakovane vzorce, nekaj smo jih predstavili na sliki 6. Točka se torej ne preslika več v točko, zato bo tudi slika na zaslonu razmazana.

Ko odseve gledamo ali jih fotografiramo, pa je leča zelo majhna. Če bi v programu le močno zastrli lečo, bi izgubili večino žarkov iz podobe (P), le kakšen bi zadel lečo. V tem primeru moramo programirati drugače kot prej. Čeprav žarki izhajajo iz točk podobe, moramo njihovo pot obrniti. Iz sredine leče pošljemo žarek na gladino, pustimo, da se od nje odbije in poiščemo točko na podobi, kamor jo ta žarek zadene. Nekako tako so si v starih časih razlagali vid, namreč da oko pošilja žarke na predmete, ki se nato tam odbijejo in prispejo nazaj v oko. Mi s takim pristopom le zagotovimo, da bo žarek iz podobe zagotovo zadel oko. Ko razberemo barvo točke na podobi (P), kamor je zadel žarek poslan iz oči, poiščemo temu žarku ustrezno točko na zaslonu (S) in jo pobarvamo z barvo točke na podobi (P).

Sedaj podrobneje opredelimo prej opisane korake.

Vektor od neke izbrane točke L na leči do točke T na vodni gladini

Za obe točki poznamo krajevna vektorja $\vec{r}$, to je vektor od koordinatnega izhodišča O do točk L in T .

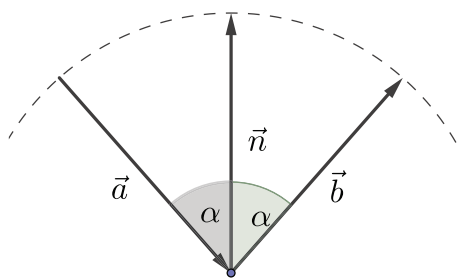
Vektor od L do T je potem

$$\vec{a}_{LT} = \vec{r}_T - \vec{r}_L.$$

Enotski vektor $\vec{a}$ v smeri vektorja $\vec{a}_{LT}$ je potem

$$\vec{a} = \frac{\vec{a}_{LT}}{a_{LT}}$$

Odboj od gladine



SLIKA 7.

K obravnavi odboja svetlobe. Skica enotskih vektorjev vpadne svetlobe ($\vec{a}$), odbite svetlobe ($\vec{b}$) in pravokotnice na gladino ($\vec{n}$) v vpadni ravnini, ki jo tvorita vektorja $\vec{a}$ in $\vec{n}$. Vpadni kot (α) je enak kotu odboja.

Da lahko izračunamo vektor odboja od gladine, potrebujemo vektor, ki je pravokoten na gladino. Pri povsem mirni gladini ima ta vektor le navpično komponento, sicer pa je podan z vektorjem $\vec{n}$. Svetloba se od gladine odbije po vsem znanem odbojnem zakonu: vektor odbitega žarka $\vec{b}_{TP}$ tvori z vektorjem $\vec{n}$ kot, ki je enak kotu z obrnjenim vpadnim vektorjem $\vec{a}_{LT}$, vsi trije pa ležijo v isti ravnini. Privzeli bomo, da so vsi trije vektorji enotski. S skice (slika 7) potem razberemo, da velja:

$$\vec{a} \times \vec{n} = \vec{b} \times \vec{n}.$$

Vektorski produkt je vektor, ki je pravokoten na ravnino obeh vektorjev, ta pa mora biti skupna vsem

trem, ki nastopajo v zgornji enačbi. Točka odboja in vektorski produkt enolično določata to ravnino. Enakost pa tudi zagotavlja, da sta vpadni kot in odbojni kot enaka. Za razliko vektorjev $\vec{a} - \vec{b}$ iz zgornje enačbe sledi:

$$(\vec{a} - \vec{b}) \times \vec{n} = 0.$$

To je možno le, če je razlika kolinearna z vektorjem $\vec{n}$:

$$(\vec{a} - \vec{b}) = \kappa \vec{n}.$$

Skalar κ sledi iz zveze s skalarnim produktom:

$$(-\vec{a}) \cdot \vec{n} = (\vec{b}) \cdot \vec{n}.$$

Ta zveza potrdi enakost vpadnega in odbojnega kota. Torej sledi za razliko vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$:

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{n} = 2\vec{a} \cdot \vec{n}.$$

Ker smo poskrbeli, da imajo vsi velikost 1, sledi:

$$\kappa = 2\vec{a} \cdot \vec{n}.$$

Torej je enotski vektor odbitega žarka:

$$\vec{b} = \vec{a} - \kappa \vec{n}.$$

Do točke (P) na podobi

Ko imamo vektor odboja, hitro pridemo do ustrezne točke P na podobi. Od točke T potujemo po premici, vzporedni z vektorjem odboja $\vec{b}$. Obiščemo točko

$$\vec{r} = \vec{r}_T + t\vec{b}.$$

Parameter t določimo tako, da postane koordinata y točk, podanih s krajevnim vektorjem $\vec{r}$, enaka koordinati $y(P)$, kamor smo postavili podobo. V tej točki preberemo njeno barvo.

Do točke (S) na zaslonu

Da pridemo do točke (S) na zaslonu, potrebujemo le vektor $\vec{a}_{LT}$. Iz znane lege podobe in leče vemo, kje leži slikovna ravnina v primeru povsem ravnega zrcala. Iz enačbe zbiralne leče:

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f},$$



A portrait of Prince Pyotr Mikhailovich Shchegolev, a Russian diplomat and statesman. He is depicted from the chest up, wearing a dark, possibly velvet, coat over a white cravat and a patterned waistcoat. A red medal with a white star-shaped pendant is pinned to his left breast. He has light-colored hair styled in a wig and is looking slightly to the right of the viewer. The background is dark and indistinct.



NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **15. avgusta 2025**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.



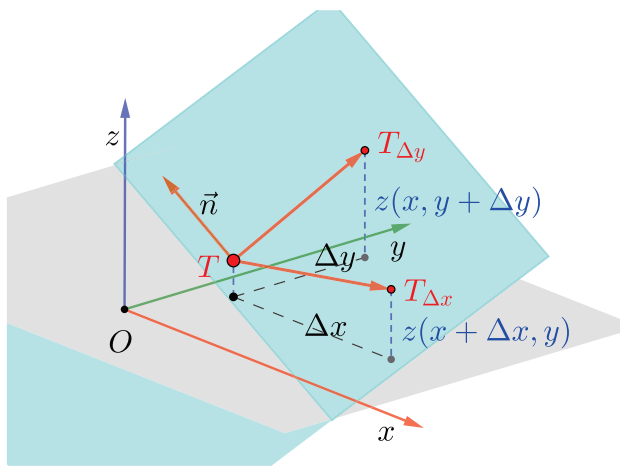
15

nadaljevanje
s strani

kjer je s_1 razdalja od leče do koordinate $y(P)$ podo-
be, s_2 pa razdalja od leče do koordinate $y(S)$ sli-
kovne ravnine. Ker privzamemo, da ima leča po-
ljubno majhno zenico, natančna lega slikovne rav-
nine niti ni pomembna.

Pravokotnica na ploskev - vektor $\vec{n}$

Ko računamo vektor odboja $\vec{b}_{TP}$ moramo poznati
gladino. Povsem ravna gladina bi ne glede, kje jo gle-
damo, imela odmik od ravnine (x, y) enak nič. Na-
gubana gladina pa ima na vsakem mestu, določenem
s koordinatama x in y drugačen odmik od ravnine
 (x, y) . Posledica tega je, da je pravokotnica na gla-
dino na vsaki točki T drugačna. Gladino opišemo z
neko funkcijo $z = z(x, y)$. Kako od te funkcije pri-
demo do pravokotnice $\vec{n}$?



SLIKA 8.

Normala na nagnjeno zrcalo.

Najprej si oglejmo ravno, a nagnjeno zrcalo. V
neki točki T na zrcalu definiramo vektor, ki leži v
ravnini zrcala, glej sliko 8. Če se, denimo odma-
knemo od točke (T) v smeri x za Δx , pridemo do
nove točke na zrcalu $(T_{\Delta x})$. Točka (T) ima koordi-
nate (x, y, z) , točka $T_{\Delta x}$ pa $(x + \Delta x, y, z(x + \Delta x, y))$.

Vektor od točk T do $T_{\Delta x}$ je potem

$$\vec{a}_x = \begin{bmatrix} \Delta x \\ 0 \\ z(x + \Delta x, y) - z(x, y) \end{bmatrix}.$$

Prav tako se od točke T odmaknemo za Δy v sme-
ri y . Sedaj dobimo vektor

$$\vec{a}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta y \\ z(x, y + \Delta y) - z(x, y) \end{bmatrix}.$$

Oba vektorja ležita v ravnini zrcala. Vektor, ki je
pravokoten na oba vektorja, je tudi pravokoten na
ravnino in torej kolinearen z vektorjem $\vec{n}$. Da sta
vektorja pravokotna, mora biti njun skalarni produkt
enak nič:

$$\vec{a}_x \cdot \vec{n} = 0,$$

$$\vec{a}_y \cdot \vec{n} = 0.$$

Iz teh dveh enačb sledi:

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} -\frac{z(x + \Delta x, y) - z(x, y)}{\Delta x} \\ -\frac{z(x, y + \Delta y) - z(x, y)}{\Delta y} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pri tem računu smo komponento n_z postavili na 1.
Tako dobljeni vektor še normiramo, da dobi dolžino
1.

Pri ukrivljenem zrcalu uporabimo za pravokotnico
 $\vec{n}$ na ploskev kar zgornji izraz, pri čemer izberemo
za Δx in Δy dovolj majhni vrednosti, da je košček
zrcala, določen z $\Delta x, \Delta y$, kamor posveti žarek, sko-
raj raven.

Sedaj si oglejmo nekaj izračunanih odse-
vov. Kar prepričljive slike odse-
vov smo dobili s preprosto
obliko zrcala, ki ponazarja stoječe valovanje na vo-
dni gladini. Gladina je opisana s funkcijo:

$$z(x, y) = \alpha \cos(k_x x) \cos(k_y y),$$

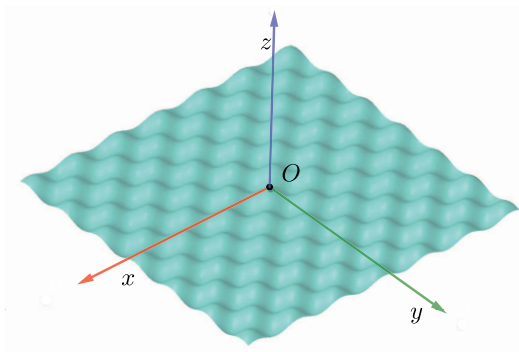
s primerno izbranimi parametri α , k_x in k_y . S pa-
rametrom α poskrbimo, da vzvalovanost gladine ni
prevelika. Na sliki 9 smo prikazali eno takih vzvalo-
vanosti. Na slikah 10 in 11 je prikazano jamborje pri

manjši in večji nagubanosti zrcala. Pri še večji nagubanosti izgubimo originalno sliko in lahko le občudujemo kompleksnost vzorca, slika 12. Tak vzorec lahko posnamemo le s kratkim ekspozicijskim časom, z očmi vidimo le migetajočo sliko. Odsevi od krožnih valov so prikazani na sliki 13. Sledi slika 14 stilizirane mavrice. Prikažemo lahko tudi nenavadne odseve pri ravnih valovih, ki jih na morski gladini le redko opazimo, slika 15. Na sliki 16 je prikazan odsev na gladini, po kateri se podijo ravni valovi v naključnih smereh. Tako gladino pričakujemo v naravi, izračunani odsev je zato kar blizu pravemu. Nagubanost je v tem primeru podana z enačbo

$$z(\vec{r}) = \sum_i \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r}),$$

kjer $\sum_i$ nakazuje seštevanje za različne valovne vektorje $\vec{k}_i$ v naključnih smereh, $\vec{r}$ pa krajevni vektor točke na gladini.

Na sliki 17 vidimo nenavaden odsev na povsem naključno nagubani gladini.



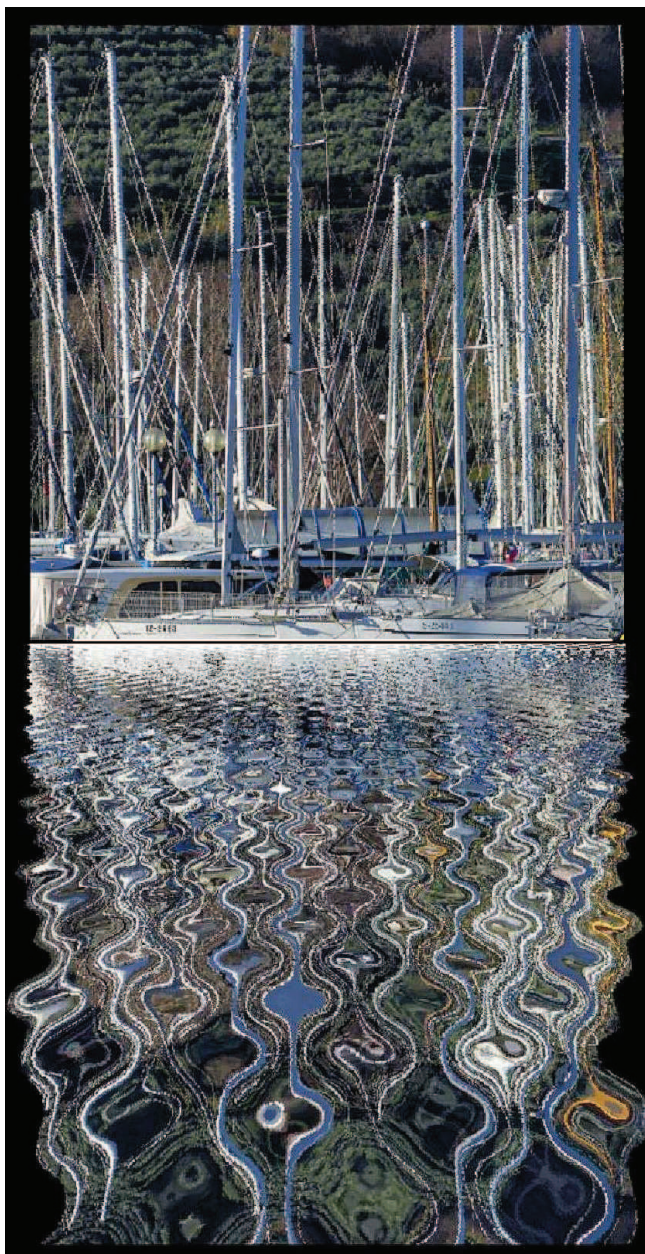
SLIKA 9.

Preprosta vzvalovanost vodne gladine, podane s funkcijo $z(x, y) = \alpha \cos(k_x x) \cos(k_y y)$.



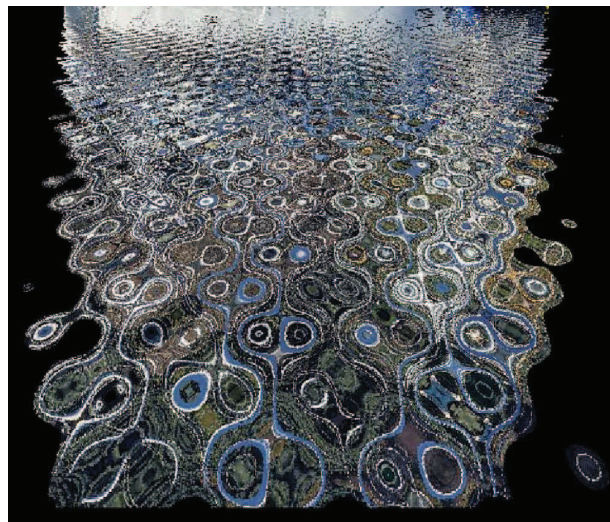
SLIKA 10.

Izračunani odsev fotografije jadrnic z jambori od vodne gladine (zgornja polovica slike je fotografija Petra Legiše).



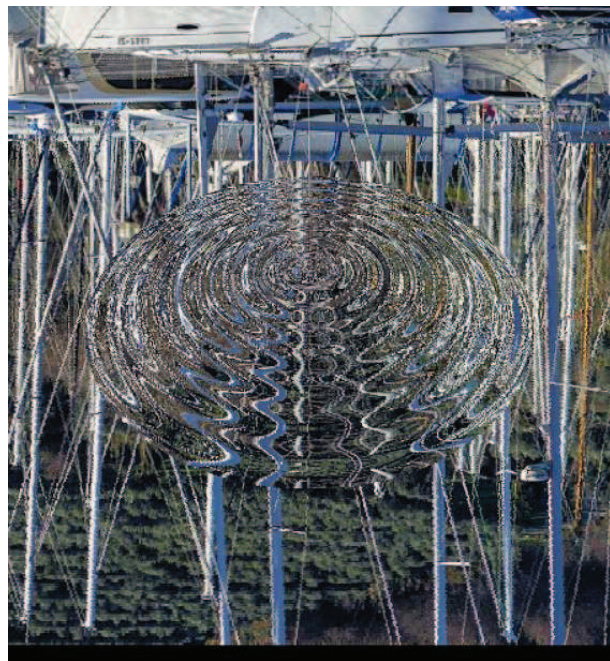
SLIKA 11.

Izračunani odsev fotografije jadrnic z jambori od nekoliko bolj vzvalovane vodne gladine.



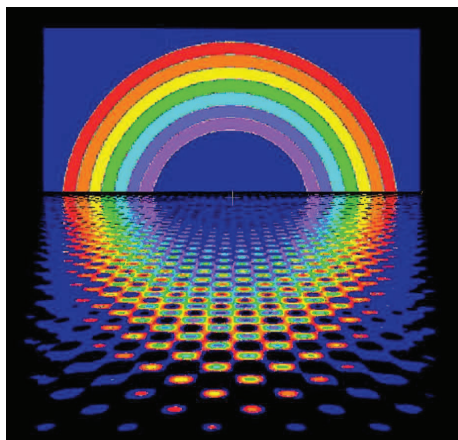
SLIKA 12.

Pri večji vzvalovanosti lahko občudujemo kompleksnost dobljene slike.

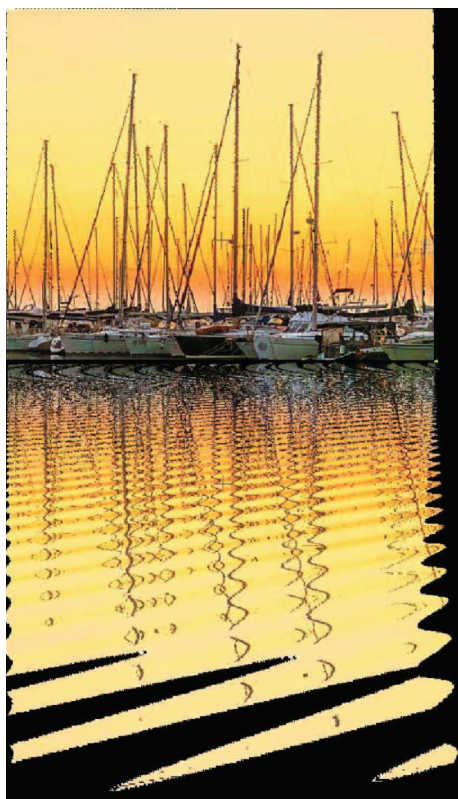


SLIKA 13.

Odsev jamborov od krožnih valov.

**SLIKA 14.**

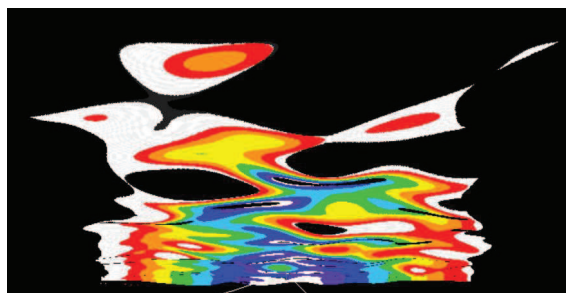
Odsev stilizirane mavrice na gladini s stoječimi valovi.

**SLIKA 15.**

Odsev jadrnic na gladini z ravnimi valovi.

**SLIKA 16.**

Odsev skice mavrice na naravno valoviti vodni gladini.

**SLIKA 17.**

Odsev skice mavrice na naključno nagubani gladini.

× × ×

Messierjev maraton 2025

↓↓↓

VID KAVČIČ, URBAN RAZPOTNIK

→ Vsake pomladi se astronomi vseh generacij veselijo Messierjevega maratona, ki ga že vrsto let organizirata Astronomsko društvo Teleskop in DMFA Slovenije. Na pobudo Andreja Guština se je Messierjev maraton uveljavil kot opazovalni del izbirnega postopka za udeležbo na Mednarodni olimpijadi iz astronomije in astrofizike. Kljub nepredvidljivi vremenski napovedi smo Messierjev maraton izvedli tudi letos, in sicer v noči s 5. na 6. april 2025 v Trnovem nad Novo Gorico.

V članku predstavljamo nekaj utrinkov z letošnjega Messierjevega maratona, poleg tega pa še nekaj praktičnih nasvetov za navdušenke in navdušence, ki se želijo podati na lov za Messierjevimi objekti.

1. Kaj je Messierjev maraton?

Za tiste, ki za Messierjev maraton slišite prvič. Na nočnem nebu lahko poleg zvezd in planetov opazujemo še veliko drugih nebesnih teles, kot so na primer meglice, galaksije in zvezdne kopice. V preteklosti so astronomi te nezvezdne objekte popisali v tako imenovanih katalogih nezvezdnih teles. Med njimi je danes med ljubiteljskimi astronomi prav zagotovo najbolj priljubljen Messierjev katalog.

Katalog sestoji iz 110 nebesnih teles, na katere je v 18. stoletju med opazovanjem kometov nalez francoski astronom Charles Messier. Če le nekoliko posežemo po podrobnostih, je Messier v katalogu, ki je izšel leta 1771, pravzaprav skupaj zbral le 103 objekte. Kasneje so astronomi katalogu dodali še nekaj svetlejših objektov, zato danes Messierjev katalog obsega skupaj 110 nebesnih teles. Objekti v Messierjevem katalogu so označeni z veliko tiskano črko M in zaporedno številko (npr. M 42 – Orionova meglica).

In kje je tu tek na dolge proge? Maraton? Ideja je nadvse preprosta. V eni noči (od mraka do zore) najti kar največ nebesnih teles iz Messierjevega kataloga.

Zmagovalka ali zmagovalec Messierjevega maratona je tista ali tisti, ki je v krajšem času našla ali našel več objektov. Če je našlo več tekmoval ali tekmovalcev enako število objektov, se pri razvrstitvi upošteva čas potrditve zadnjega objekta. Poudariti gre še, da uporaba elektronskih pripomočkov in elektronskega vodenja teleskopa (funkcija GO-TO) ni dovoljena.

Čeprav je Messierjev maraton v osnovi tekmovalne narave in je hkrati tudi del izbirnega postopka za uvrstitev na Mednarodno olimpijado iz astronomije in astrofizike, gre v prvi vrsti za izjemno prijeten družaben dogodek, ki povezuje ljubiteljske astronome vseh generacij.



SLIKA 1.

Utrinek z letošnjega Messierjevega maratona. Fotografija: Primož Kuk.

2. Letošnji maraton

Letos smo Messierjev maraton izvedli v noči med 5. in 6. aprilom na standardni lokaciji na Trnovem nad Novo Gorico. Vremenska napoved je bila do zadnjega trenutka nekoliko negotova, a na koncu smo maraton kljub delni oblačnosti lahko izvedli. Dogodek sva koordinirala Primož Kuk (Astronomsko društvo teleskop) in Vid Kavčič (DMFA Slovenije), ob ne-

precenljivi pomoči Dunje Fabjan ter sodnic in sodnikov Nike Košir, Andreje Eršte, Urbana Razpotnika, Roka Kovača, Petra Andolška, Aleša Rusa in Mihe Brvarja.



SLIKA 2.
Najboljši trije tekmovalci Messierjevega maratona – Žiga Vučajnk, Primož Markovič in Blaž Gašperlin. Fotografija: Dunja Fabjan.



SLIKA 3.
Skupinska fotografija po razglasitvi rezultatov Messierjevega maratona in razglasitvi olimpijske ekipe za letošnjo Mednarodno olimpijado iz astronomije in astrofizike. Fotografija: Primož Kuk.

Na maratonu je zmagal **Žiga Vučajnk**, drugi je bil **Primož Markovič**, tretje mesto pa je zasedel **Blaž Gašperlin** (slika 1). Skupni rezultati Messierjevega maratona so zbrani v tabeli 1. Poleg uvrstitve in imena tekmovalke ali tekmovalca je navedeno še število najdenih Messierjevih objektov. Pri tistih z enakim številom odloča vrstni red ura, ko so našli zadnji

objekt. Na letošnjem Messierjevem maratonu so organizatorji za popestritev k naboru standardnih 110 objektov dodali še dva virtualna objekta M 111 (Hi Perzeja) in M 112 (H Perzeja).

Uvrstitev	Ime in priimek	Št. najdenih objektov
1	Žiga Vučajnk	66
2	Primož Markovič	59 (23.20)
3	Blaž Gašperlin	59 (23.31)
4	Anže Jakovac	57
5	Enej Jauk	56
6	Luka Izak Tasič	50
7	Aljaž Erman	48
8	Žan Arsov	43
9	Nika Videnšek Podgorelec	35
10	David Grgič	26
11	Gorazd Bizjan	23
12	Andraž Čadež	21
13	Matej Miklavčič (pomoč: Marko Miklavčič)	19
14	Niko Habinc	18
15	Urban Pleša	15
16	Svit Miklavčič	14
17	Marcel Juršič	12
18	Nika Arsov	12 (22.54)
19	Andraž Kušter	12 (23.04)
20	Marcel Juršič	12 (23.08)
21	Aleksander Jotanovič	10
22	Mihael Praznik	7 (22.52)
23	Jurij Vrtovec	7 (22.55)
24	Ajda Vozelj	5
25	Gabriel Pagliaruzzi	2

Tabela 1: Rezultati individualnega (klasičnega) Messierjevega maratona. Pri tekmovalkah in tekmovalcih z enakim številom najdenih objektov je naveden tudi čas, ko so našli zadnji objekt.

V zadnjih letih se je na Messierjevem maratonu uveljavilo tudi tekmovanje skupin, kar pomeni, da se tekmovanja udeleži ekipa z več člani iz iste šole. To je odlična priložnost za povezovanje, sodelovanje in skupno raziskovanje neba. Zato vabimo vse šole: zberite ekipo, podajte se na skupinsko pustolovščino in pridite na Messierjev maraton! Rezultati skupinskega tekmovanja so zbrani v tabeli 2.





Uvrstitev	Ime ekipe	Št. najdenih objektov
1	Črva s Poljan	15
2	Gimnazija Vič	13
3	Itiji	13 (22.57)
4	Čmuk čmuk	13 (23.22)
5	Skupina Brici	5

Tabela 2: Rezultati ekipnega Messierjevega maratona. Pri ekipah z enakim številom najdenih objektov je naveden tudi čas, ko je ekipa našla zadnji objekt.

3. Iskanje Messierjevih objektov

Tekmovalke in tekmovalci se na Messierjevem maratonu soočijo s prav posebnim izzivom: v eni sami noči poskušajo poiskati čim več izmed 110 Messierjevih objektov. Zveni zahtevno – in tudi je! A mladi astronomi in astronomke so se v zadnjih letih v tem prav mojstrsko izurili. Ključ do uspeha so dobre zvezdne karte, ki razkrivajo pot do posameznih objektov, in seveda veliko opazovalnih izkušenj, ki jih udeleženske in udeleženci pridobijo z vztrajnim delom pod nočnim nebom.

V kratkem bo izšel Vodnik po Messierjevih objektih z nasveti in podrobnejšimi zvezdnimi kartami, ki ga je s svojimi dolgoletnimi opazovalnimi izkušnjami pripravil Urban Razpotnik. Priročnik je namenjen vsem mladim astronomkam in astronomom, ki si želijo podati na nočni lov za meglicami, galaksijami in kopicami.

V članku mladim astronomkam in astronomom ponujamo dva opazovalna izziva. S priloženimi opisi in kartami poiščite objekta M 31 (Andromedina galaksija) in M 15 (Pegazova kopica).

4. Andromedina galaksija – M 31

Andromedina galaksija ali M 31 je naša najbližja večja galaksija, ki je kot megličast oblaček vidna s prostim očesom, oddaljena pa 'le' 2,5 milijona svetlobnih let. V ljubiteljskih teleskopih v vidnem polju skupaj s svetlim jedrom Andromedine galaksije zlahka opazimo tudi njeni spremljevalki M 32 in M 110. Pri tem je M 32 videti kot svetla neizostrena zvezda, M 110 pa je precej temen in bolj razsežen oblaček na nasprotni strani svetle M 31.

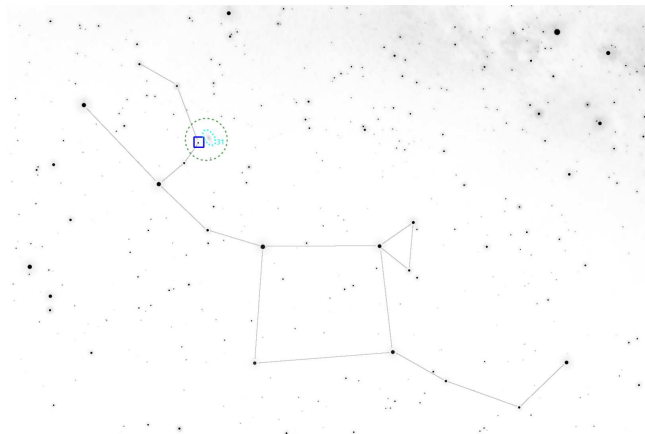
Pri iskanju Andromedine galaksije si pomagamo z ozvezdji Perzej in Andromeda, prikazani na sliki 5. Zeleni črtkan krog kaže vidno polje velikosti 5°, kar je običajno za daljnogled ali iskalo teleskopa. Rdeči krog označuje vidno polje velikosti 1°, kar je značilno vidno polje ljubiteljskih teleskopov.



SLIKA 4. Pogled, ki smo mu priča, če pogledamo Andromedino galaksijo skozi amaterski teleskop. V realnosti slika ni videti barvna, saj v temi človeške oči vidijo le črno-belo. Desno je vidna M 32, levo zgoraj pa M 110. Fotografija: Urban Razpotnik.

5. Pegazova kopica – M 15

Pegazova kopica ali M 15 je kroglasta kopica, ki jo lahko vidimo že skozi običajen daljnogled. Nahaja se v ozvezdju Pegaz, od Zemlje pa je oddaljena 35 700 svetlobnih let. Čeprav so si kroglaste kopice na videz precej podobne, lahko M 15 zlahka prepoznamo, saj tvori majhen trikotnik z zvezdama 6. in 7. magnitude, nahaja pa se ravno v smeri, kamor kaže Pegazovo krilo. Navodila za iskanje kopice prikazuje slika 8.



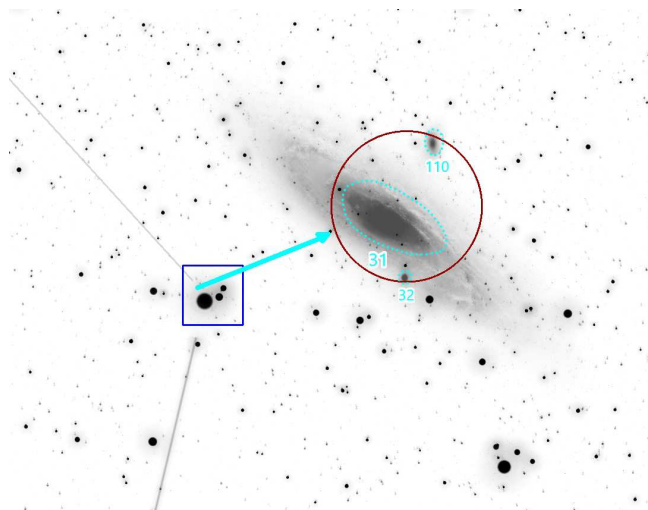
SLIKA 5.

Ozvezdji Pegaz in Andromeda



SLIKA 7.

Pogled na M 15 skozi okular ljubiteljskega teleskopa. Fotografija: Urban Razpotnik.



SLIKA 6.

Podrobnejša karta za območje Andromedine galaksije

6. Za konec

Prav opazovanje je tisto, zaradi česar je astronomija posebna. Ni le tekmovanje – je tudi druženje, spoznavanje ljudi s podobnimi zanimanji in ne nazadnje tudi zabava. Ko se zberemo pod nočnim nebom, opazujemo svetlobo, ki je do nas potovala milijone let, si delimo zgodbe, znanje in izkušnje ... Vse to in še več nas čaka na javnih opazovanjih, največje med njimi pa je prav Messierjev maraton. Vreme nam sicer pogosto ponagaja, a takšnega dogodka ne gre zamuditi – ne glede na to, ali se ga udeležimo kot izkušeni astronomi z lastnim teleskopom, kot šolska skupina ali kot posamezniki, ki si želimo naučiti se kaj novega in uživati v dobri družbi.

www.presek.si

www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/

Križne vsote

↓↓↓

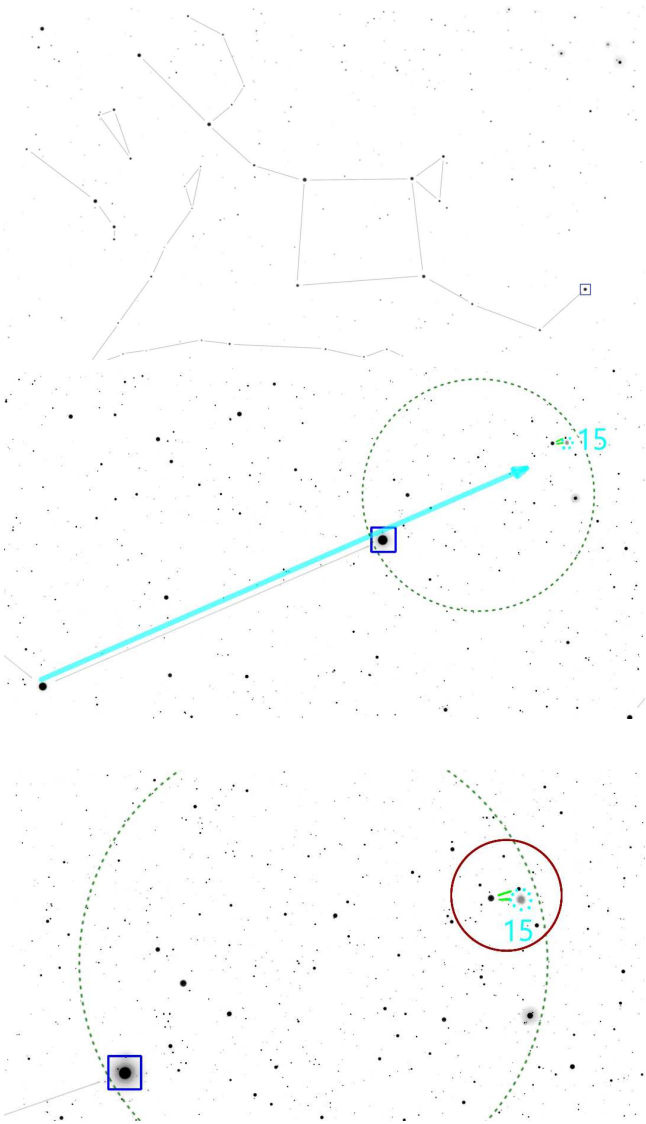
→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratu na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse številke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

	12	4		
9			8	
12				15
		7		
		11		

↓↓↓

REŠITEV KRIŽNE VSOTE

6	2	11		
9	1	7		
15	5	3	4	12
		8	1	8
		4	12	



SLIKA 8.
Karta prikazuje, kako najti kopico M 15.

× × ×

× × ×

Bistrouti 2025

↓ ↓ ↓

BOŠTJAN KUZMAN

→ V šolskem letu 2024/25 je na tekmovanjih iz znanja v organizaciji DMFA Slovenije sodelovalo 101.189 tekmovalk in tekmovalcev, pomagalo jim je 7624 mentorjev iz 710 šol, skupaj pa so osvojili 840 zlatih priznanj. Kot že vrsto let smo tudi letos zanje pripravili slavnostno podelitev Bistrouti v Unionski dvorani v Ljubljani, ki je potekala v nedeljo, 1. junija. Na prireditvi je bilo podeljenih 210 nagrad in pohval za najuspešnejše, prejelo pa jih je 180 različnih tekmovalcev in tekmovalk, ki so se pripravljali pod mentorstvom 154 mentorjev iz 104 šol. Vrhunec prireditve je bila predstavitev tekmovalk in tekmovalcev, ki so se uvrstili v slovenske ekipe za svetovna in evropska tekmovanja iz matematike, fizike, astronomije in ekonomije. V uvodnem videoposnetku so si prisotni najprej ogledali kratko zgodovino DMFA Slovenije s poudarkom na tekmovanjih, nekdanje republiških, danes državnih. Spomnili smo se na prve medalje za samostojno Slovenijo, na prve priprave in poletne šole, pa tudi na tiste mednarodne olimpijade, ki so bile pod okriljem društva že organizirane pri nas: *Mednarodna fizikalna olimpijada v Portorožu (1985)*, *Mednarodna matematična olimpijada v Ljubljani (2006)*, *Evropska fizikalna olimpijada v Ljubljani (2022)* in *Evropska dekliška matematična olimpijada v Portorožu (2023)*.

Prireditve je čudovito povezovala voditeljica Maja Ratej, znanstvena novinarka, sicer pa tudi nekdanja navdušena tekmovalka. Po predstavitvi osnovnih statističnih podatkov o tekmovanjih je spomnila na vse imenitne uspehe, ki so jih slovenski tekmovalci dosegli v minulem letu. Na **65. Mednarodni matematični olimpijadi** v Angliji je Nace Hranjec osvojil srebro, Luka Urbanc bron, Žiga Oštir, Patricia Kiraly in Nives Gošnjak pa pohvale. Na **8. Evropski fizikalni olimpijadi** v Gruziji je Peter Andolšek osvojil zlato, Enej Jauk srebro, Aljaž Erman pa bron. Na **17. mednarodni olimpijadi iz astronomije in astrofizike** v Braziliji je Peter Andolšek osvojil zlato in absolutno prvo mesto. Prav tako je zlato osvojil Žan Arsov, srebro sta osvojila Aleš Rus in Žiga Vučajnk, pohvalo pa Patricia Kiraly. Na **7. Mednarodni olimpijadi iz ekonomije** v Grčiji sta Špela Gačnik in Benja-



SLIKA 1.

Kot že nekaj let doslej, je tudi letošnja prireditev potekala v prelepi Unionski dvorani.

min Gašperin osvojila srebrni medalji, Aljaž Plut in Borja Ranzinger pa bronasti. Na letos že izvedeni **14. evropski dekliški olimpijadi** na Kosovu sta Patricia Kiraly in Ekaterina Chizhova osvojili srebrni medalji, Naja Oblak in Sara Ferreira pa pohvali. Skupaj so slovenski tekmovalci in tekmovalke v zadnjem letu osvojili 3 zlate, 8 srebrnih in 4 bronaste medalje in dvorana je te izjemne uspehe nagradila z dolgim, glasnim aplavzom. Prisotne v dvorani sta nato nagovorila Ciril Dominko v imenu DMFA Slovenije in mag. Andrej Sotošek v imenu Ministrstva za vzgojo in izobraževanje, ki sta poudarila podporo in sodelovanje šol, mentorjev, staršev in pristojnih institucij. Zahvalili smo se tudi diamantnemu sponzorju Zavarovalna skupina Sava. Sledile so podelitve priznanj za državna tekmovanja iz matematike, fizike, astronomije in ekonomije, pri katerih so nagrajenci na odru prejeli simbolična darila in se skupinsko fotografirali.

Znanstvena gostja prireditve je bila **dr. Lara Ulčakar**, raziskovalka na področju kvantne optike in fizike kondenzirane snovi, zaposlena na Institutu Jožef Stefan. Nedavno je sodelovala pri ponovni izvedbi znamenitega eksperimenta, s katerim so pred




SLIKA 2.

Voditeljica Maja Ratej je na začetku predstavila nekaj statističnih podatkov.

nekaj desetletji dokazali obstoj kvantne prepletenosti. Predstavila je svoje delo s sodelavci v raziskovalni skupini, opisala nekaj opreme, ki jo uporabljajo, posebej pa je navdušila s svojo izkušnjo skoraj-astronavtke. Pred nekaj leti je namreč kandidirala in prišla v ožji izbor za astronautko pri Evropski vesoljski agenciji ESA, kar ji je odprlo povsem nova obzorja in motivacijo za nadaljno znanstveno pot.


SLIKA 3.

Znanstvena gostja dr. Lara Ulčakar je prisotne navdušila s svojo izkušnjo candidature za astronautko pri ESA.

Prireditve sta z dvema plesno akrobatskima točkama popestrili Tinkara Loverčič in Eva Kobal, članici Duo Kamikazete, ki v zadnjih letih navdušujeta

občinstvo v televizijskih oddajah in lastnih, izvirnih umetniških projektih. Čeprav so mnogi v dvorani zelo dobro razumeli fizikalne pojme, kot so navor, ročica sile, vztrajnostni moment, gibalna in vrtilna količina, bi le težko z matematičnimi enačbami opisali njun nastop, ki je požel ogromen aplavz celotne dvorane.


SLIKA 4.

S čudovito plesno točko sta prireditev popestrili Tinkara Loverčič in Eva Kobal, Duo Kamikazete.

Nato je voditeljica napovedala najpomembnejši trenutek prireditve, predstavitev slovenskih ekip za svetovna in evropska tekmovanja. Ob projekciji zemljevidov Avstralije, Kosova, Francije, Nemčije, Indije in Azerbajdžana so na oder drug za drugim prišli Taras Vuk, Žiga Oštir, Nace Hranjec, Patricia Király, Ekaterina Chizhova in Andraž Čadež (66. MMO v Sydneyu), Patricia Király, Ekaterina Chizhova, Naja Oblak in Sara Ferreira (14. EDMO v Prištini), Enej Jauk, Primož Markovič, Blaž Gašperlin, Aljaž Erman, Svit Miklavčič (55. MFO v Pallaiseau), Žan Arsov, Enej Jauk, Aleksander Jotanovič, Svit Miklavčič, Žiga Vučajnk (9. EFO v Sofiji), Žan Arsov, Žiga Vučajnk, Nika Videnšek Podgorelec, Primož Markovič, Aljaž Erman (18. MOAA, Mumbai) in Nika Videnšek Podgorelec, Mark Iztok Lunder, Suna Srdić, Žiga Vučajnk ter Matija Lakner (8. MEO, Baku). Rokovanju s slavnostnimi

gosti je sledilo skupinsko fotografiranje, udeleženci dveh olimpijad Nika Videnšek Podgorelec pa se je v imenu vseh olimpijcev zahvalila za podporo in obljubila, da se bodo na olimpijadah potrudili čim bolj zastopati slovenske barve.


SLIKA 5.

Vrhunec prireditve je bila predstavitev letošnjih ekip za mednarodna tekmovanja.


SLIKA 6.

Odlično razpoloženje je vladalo tudi na koncu ob skupinskem fotografiranju.

V nadaljevanju prireditve so bile podeljene še nagrade in pohvale za druga tekmovanja pod okriljem DMFA Slovenije. V zaključku smo se s posebno pro-


SLIKA 7.

Matematično olimpijsko ekipo na odru je iz dvorane z zanimanjem spremljala tudi njihova maskota.

sojnico zahvalili še odličnim mentorjem, ki delajo kot učitelji v slovenskih osnovnih in srednjih šolah, napovedali matematični tabor MARS 2025 in prosili morebitne sponzorje ali donatorje, ki bi lahko podprli priprave olimpijcev ali druge aktivnosti, da nam pišejo na e-naslov sponzorstva@dmfa.si. S skupinskim fotografiranjem vseh nagrajencev na odru in voščilom za prijetne poletne počitnice smo uspešno zaključili še eno prireditev.


SLIKA 8.

Pred dvorano so študentje vabili srednješolce k prijavi na poletni tabor MARS 2025. Prijave so morda še možne, obiščite spletno stran mars.dmfa.si.

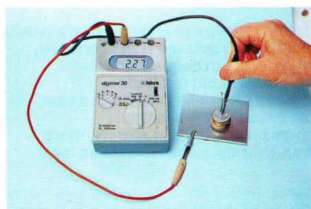
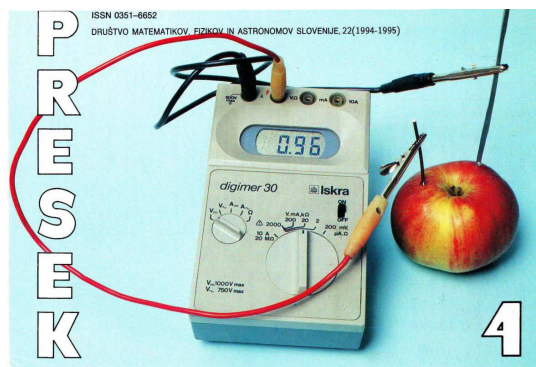
× × ×

Poskusa ob Voltovi obletnici

PRESEK ŠT. 4, LETNIK 22 (1994-95)

↓↓↓

→ Leta 1995 je Presek obeležil 250. obletnico rojstva italijanskega fizika in izumitelja Alessandra Volta (1745-1827), ki je raziskoval predvsem električne in magnetne pojave, ki v 18. stoletju burili duhove. Ob tej priložnosti je profesor Janez Strnad za Presekove bralke in bralce pripravil dva preprosta fizikalna eksperimenta. Za prvega potrebujete nekaj kovancev in v slano vodo namočen papir, za drugega pa jabolko, kos cinkove pločevine in kos bakrene žice. Namesto nekdanjih slovenskih kovancev bodo seveda dobri tudi evrski, za merjenje napetosti pa potrebujete voltmeter. Čas počitnic je idealen tudi za kakšen eksperiment, pa čeprav ni prav nov. Boste poskusili sami?



Baterija petih Voltovih členov s kovanci za 5 tolarjev in 50 stotinov. Gonilna napetost je 2,27 V (foto Marjan Smerke).

FIZIKA

POSKUSA OB VOLTOMI OBLETNICI

Z dvema preprostima poskusoma, ki ju je mogoče narediti na vsaki šoli, lahko počastite spomin na Alessandra Volta. Najprej sestavite Voltov steber iz slovenskih kovancev. Tudi Volta je pri svojih poskusih pogosto uporabljal kovance. Na mizo položite kovanec za 5 tolarjev, nanj v slano vodo namočen košček navadnega papirja in nanj kovanec za 50 stotinov. Kos papirja naj bo večji od malega kovanca, a manjši od velikega. Pomerite napetost med kovancema. Dodajte naslednji par kovancev in vlažni listič ter zopet izmerite napetost (slika na zadnji strani ovitka). Napetost je sorazmerna s številom parov kovancev (slika 1). Poskus smo tako naredili s petimi pari, mogoče jih je sestaviti precej več. Uporabite lahko tudi kovance kake druge države.

Slika 1. Napetost na bateriji U je sorazmerna s številom členov n . Čeprav se to število spreminja v korakih po 1, smo narisali premico, ki se najbolje prilega merilnim točkam. Izidi se pri različnih merjenjih malo razlikujejo, gonilna napetost je odvisna od temperature in nekoliko tudi od podrobnosti kovancev in elektrolita. Dobro je kovance pred poskusom razmastiti z milnico. Graf kaže izide pri treh različnih merjenjih. Pri enem izmed merjenj pri srednji temperaturi je bila gonilna napetost petih členov 2,67 V in gonilna napetost enega člana v povprečju 0,54. Pri drugem pri nekoliko višji temperaturi je gonilna napetost petih členov merila 2,86 V in napetost enega člana v povprečju 0,57 V. Voltmeter UNIMER pri obsegu 5 V je v tem primeru pri petih členih pokazal zaradi padca napetosti na upor členov samo 0,9 V. Pri merjenju na sliki pri nekoliko nižji temperaturi je bila gonilna napetost petih členov 2,27 V in povprečna napetost enega člana 0,45 V.

Pri drugem poskusu zabodete v jabolko kos bakrene žice in kos cinkove pločevine. Kovini in sok v jabolku sestavljajo člen z gonilno napetostjo, ki je razmeroma velika (slika na naslovnici).

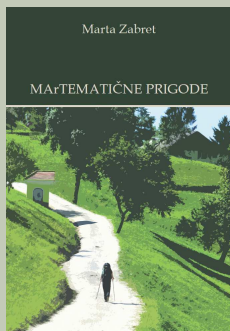
Premislite še o drugih možnostih in sestavite člene. Z baterijo takih členov lahko ponovite še druge Voltove poskuse, a bodite pri nekaterih previdni.

Napetost je najugodnejše meriti z digitalnim voltmetrom, ki ima zelo velik upor in ki zato pokaže naravnost gonilno napetost. Za silo lahko uporabimo tudi drug voltmeter z dovolj velikim uporom. Čim manjši je upor, tem manjšo napetost pokaže zaradi padca napetosti na upor člana.

Janez Strnad

Nekaj iz ponudbe Založbe FMF

V Založbi Fakultete za matematiko in fiziko izdajamo matematično in fizikalno literaturo.
V nadaljevanju vam predstavljamo dve knjigi.

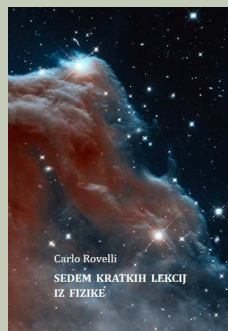


Marta Zabret:

MATeMATIČNE PRIGODE

148 strani
format 14×20 cm
mehka vezava

12,50 EUR



Carlo Rovelli:

SEDEM KRATKIH LEKCIJ IZ FIZIKE

76 strani
format 12×17 cm
mehka vezava

9,50 EUR

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela.

<https://www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/katalog/>

Dodatne informacije lahko dobite v knjižnici Fakultete za matematiko in fiziko po telefonu (01) 4766 558.



	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A		W	E	S	T	M	I	N	S	T	E	R												
	E	L	E	K	T	R	O	N	I	K	A		H	A	R	L	E	K	I	N	A	D	A											
	N	I	L	S		A	N	T	R	I	M		I	S	K	A	L	O		E	H	U	D											
	O	B	U	P		I	K	R	A				T	T	K	I	N	E	T	I	K	A												
	P	A	R	E	N	H	I	M		A	N		E	W	A	K	A	S		T	A	R												
	A	B	R	A	I	S	A						H	O	B	I		K	L	I	C													
	E	V	A	R	I	S	T	E					G	E	O	R	G	E		A	E	I	P											
	G	A	Z		E	M	I		G	E	R	E		A	R	A	D	O	R	I		D	O	S	J	E								
	K	L	O	B	A	S	A		N	E	L	S	O	N		O	R	A	N	J	E	S	T	A	D									
	R	E	V	O	L	T		O	N	J	E	G	I	N		F	R	E	E	T	O	W		P	A	L	I	S	A	D	A	C		
	M	R	Č		O	M	E	J	I		E	V		D	A	R	E		M	N	O	G		O	T	E	R	N	O	S	T			
	I	N	I	C	I	A	T	O	R		A	N	A	R	E	K	S		K	O	L	O		K	O	S		W	E	B	S	T	E	R
	N	A	N	O	S		N	I	K																									
	P	R	A	S	E	V	A	N	J	E		A	S		B	A	C	A	L	L														
	A	Č		N	A	T	O		P	I	N	J	A		N	E	N	A	D															
	M	E	S	O		A	S	C	E	N	D	E	N	T		N	I	Č																
	P	L	U	T	A		T	O	N	E	R		D	E	L	I	T	E	V															
	L	O	P	A	R																													

REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 52/5

→ Pravilna rešitev nagra-
dne križanke iz tretje
številke Preseka letnika
52 je **kozmozologija**. Med
pravilnimi rešitvami
smo izžrebali naslednje
reševalce: Neža Rifel
iz Kamnika, Eva Šolinc
iz Črnuč, Janko Rušt iz
Nove Gorice, ki bodo
nagrade prejeli po pošti.

× × ×

Andrej Guštin, Dunja Fabjan, Vid Kavčič, Simon Bukovšek

Zbirka nalog z astronomskih tekmovanj 2009–2024

Teorija in rešene naloge za srednje šole

Ob 15. obletnici tekmovanj iz astronomije je pri založbi FMF izšla Zbirka nalog z astronomskih tekmovanj – teorija in rešene naloge za srednje šole.

Poleg več kot **230 rešenih nalog** s šolskih, z državnih in izbirnih tekmovanj za srednje šole prinaša zbirka tudi **povzetke teorije**, ki bodo v pomoč tekmovalkam in tekmovalcem pri pripravi na astronomska tekmovanja. Zbirko bogati več kot **140 skic in fotografij**, ki bralkam in bralcem pomagajo pri razumevanju vsebine.

Zbirka je razdeljena na šest tematskih sklopov: **osnove astronomije, nebesna mehanika, svetloba in sevanje, zvezde in zvezdni sistemi, kozmologija in optika**. Vsak tematski sklop se začne s povzetkom teoretičnih vsebin, vse od temeljnih pa do zahtevnejših konceptov. Sledi izbor nalog, ki se navezujejo na obravnavano tematiko. Urejene so po težavnosti, hkrati pa je vsaka naloga opremljena tudi z oznako letnice in ravni tekmovanja. Poleg tega zbirka zajema tudi sklope **koristne matematične veze, obdelava podatkov in vrtljiva zvezdna karta**.

Zbirka predstavlja prvo tovrstno gradivo pri nas, zato je nepogrešljiv pripomoček za mlade astronomke in astronome, ki si želijo boljšega razumevanja in bolj poglobljenega stika z astronomijo. Hkrati pa lahko služi kot odličen pripomoček za pripravo na šolska, državna in izbirna tekmovanja iz astronomije – tako za dijakinje in dijake kot tudi njihove mentorice in mentorje. V veliko pomoč pa bo tudi študentkam in študentom, ki se astronomiji posvečajo v okviru univerzitetnega študija na prvi stopnji.

Poleg omenjene knjige ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitev so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

<https://www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/katalog/>

Dodatne informacije lahko dobite v knjižnici Fakultete za matematiko in fiziko po telefonu (01) 4766 558.

