PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **9** (1981/1982)
Številka 1
Strani 21–24

Dragoljub M. Milošević, prevod Peter Petek:

PLOŠČINA PRAVILNEGA DVANAJSTKOTNIKA

Ključne besede: matematika, geometrija, ploščina, dvanajstkotnik.

Elektronska verzija:
http://www.presek.si/9/9-1-Milosevic-Petek-dvanajstkotnik.pdf

PLOŠČINA PRAVILNEGA DVANAJSTKOTNIKA

Pokazali bomo kako lahko izračunamo ploščino pravilnega dvanajstkotnika, če poznamo

A) stranico a pravilnega dvanajstkotnika

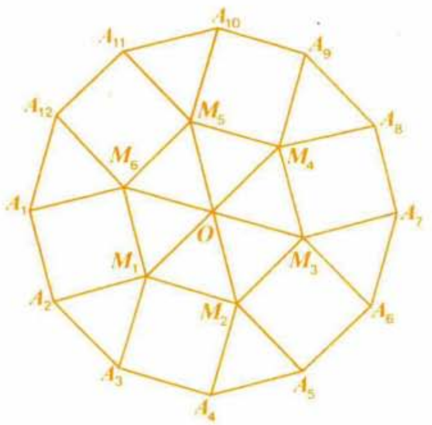
B) polmer r dvanajstkotniku opisanega kroga

A) *1. način*

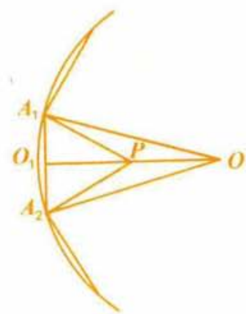
Nad vsako drugo stranico pravilnega dvanajstkotnika A_1A_2 ... A_{12} (slika 1) konstruiramo na notranji strani po en enakostraničen trikotnik. Lahko je pokazati, da njihovi vrhovi

M_1, M_2, ... M_6 predstavljajo oglišča pravilnega šestkotnika s stranico a. Tako smo dvanajstkotnik razstavili na 6 skladnih kvadratov in 12 skladnih enakostraničnih trikotnikov. Zato je ploščina enaka

$$P = 6 \cdot a^2 + 12 \cdot a^2 \sqrt{3}/4 = 3a^2 (2 + \sqrt{3})$$



Slika 1



Slika 2

2. način

Izberemo enega od 12 skladnih enakokrakih trikotnikov z vrhom v središču dvanajstkotnika in stranico a kot osnovnico (slika 2). Konstruiramo višino na osnovnico OO_1. Potem izberemo na daljici OO_1 točko P tako, da je trikotnik A_1A_2P enakostraničen, torej $\sphericalangle A_1PA_2 = \sphericalangle A_2PA_1 = 60°$. Kot ob vrhu O je enak $360° : 12 = 30°$, kot OA_1A_2 ima $75°$, $\sphericalangle OA_1P = \sphericalangle OA_2P = 15°$. Trikotnik A_1A_2P je enakostraničen, trikotnik A_1PO pa ima dva kot enaka $15°$, zato je enakokrak in zato $OP = A_1P = a$. Višina OO_1 je torej sestavljena iz višine enakostraničnega trikotnika $O_1P = a\sqrt{3}/2$ in daljice $OP = a$. Tako je ploščina trikotnika A_1A_2O enaka

$$p(\Delta A_1A_2O) = a(a + a\sqrt{3}/2)/2 = a^2\ (2 + \sqrt{3})/4$$

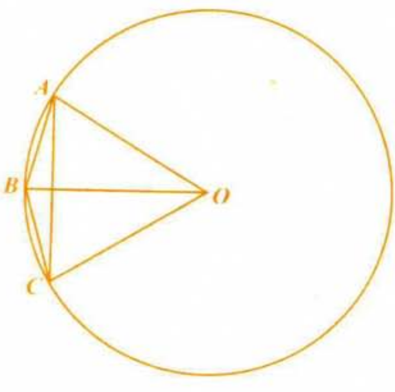
Ploščina dvanajstkotnika je dvanajstkrat večja

$$p = 3a^2(2 + \sqrt{3})$$

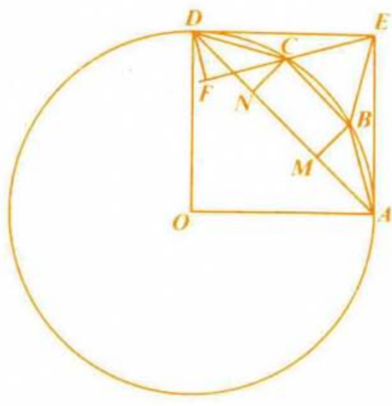
B) *1. način*

Pravilni dvanajstkotnik je sestavljen iz šestih skladnih deltoidov. Eden od njih je $ABCO$ na sliki 3. Diagonali deltoida sta obe enaki polmeru r očrtanega kroga. Diagonala BO se kar ujema s polmerom, diagonala AC pa je stranica pravilnega šestkotnika in zato spet enaka polmeru r. Tako imamo

$$P = 6 \cdot r \cdot r/2 = 3r^2$$



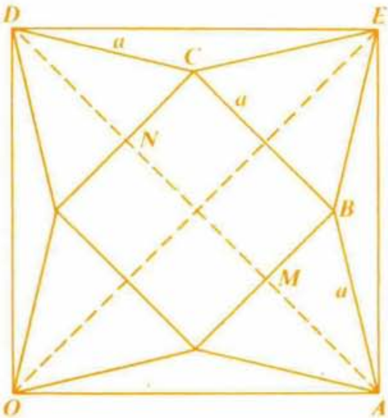
Slika 3



Slika 4

2. način

Na sliki 4 vidimo tri stranice pravilnega dvanajstkotnika in kvadrat, ki smo ga konstruirali nad polmerom r. Najprej bomo pokazali, da imata enakokraki trapez $ABCD$ in petkotnik $ABCDE$ enaki ploščini.



Slika 5

Točki M in N sta nožišči normal, ki ju spustimo iz točk B in C na diagonalo AD kvadrata. Kot ABC je kot pravilneg dvanajstkotnika in zato enak $150°$, kot ABM je tako $150° - 90° = 60°$ in je trikotnik ABM polovica enakostraničnega. Ker je $\sphericalangle DAE = 45°$ in $\sphericalangle BAM = 30°$, velja $\sphericalangle BAE = 15°$. Pravokotnik $MBCN$ je polovica kvadrata ($MB = \frac{1}{2} BA = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} a$) in ima ploščino $a^2/2$. Poglejmo sliko 5! Po simetriji sklepamo, da je trikotnik BCE enakostraničen in zato po ploščini enak vsoti ploščin trikotnikov ABM in DCN. Koti BAE, BEA, CED in CDE so vsi enaki $15°$, zato je $\sphericalangle DCE = 150°$. Iz točke D potegnemo normalo na podaljšek stranice EC in dobimo nožišče F. Ker je $\sphericalangle DCF = 180° - 150° = 30°$, je tudi trikotnik CDF polovica enakostraničnega in $DF = a/2$. To pa je ravno višina trikotnika CDE na stranico CE, ki je enaka a. Ploščina trikotnika CDE je torej $a^2/4$. Isto velja za trikotnik ABE. Vsota njunih ploščin je zato $a^2/2$, kar je ravna ploščina pravokotnika $BMNC$. Upoštevaje vse ploščinske enakosti vidimo, da ima trapez $ABCD$ enako ploščino kot petkotnik $ABCDE$. Ker dasta skupaj pol kvadrata, je ploščina petkotnika $OABCD$ enaka trem četrtinam ploščine kvadrata *OAED*, to je $\frac{3}{4}r^2$. Dvanajstkotnik sestavljajo štirje enaki petkotniki s ploščinami $\frac{3}{4}r^2$. Tako dobimo končno

$$P = 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot p(OAED) = 3r^2$$

Nalogi:

1. Uporabi trapez *ABCD* na sliki 4 in z njegovo pomočjo še enkrat izračunaj ploščino pravilnega dvanajstkotnika, če poznaš njegovo stranico a!
2. Izrazi ploščino pravilnega dvanajstkotnika, če poznaš polmer ρ včrtanega kroga.

Dragoljub M. Milošević
prev. *Peter Petek*