

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 6 (1978/1979)

Številka 3

Strani 132-133

Danijel Bezek:

HERONOVI TRIKOTNIKI

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/6/368-Bezsek.pdf>

© 1979 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.



HERONOVI TRIKOTNIKI

V celoštevilskih trikotnikih so dolžine stranic naravna števila.

Če za celoštevilске trikotnike zahtevamo še kak dodaten pogoj, govorimo o "odlikovanih" celoštevilskih trikotnikih.

Matematiki vseh časov so se z njimi radi ukvarjali, ker skriva jo pod geometrijskim plaščem često zanimivo aritmetično in algebrsko vsebino.

Presek je že objavil članke o celoštevilskih trikotnikih, ki imajo naslednje dodatne lastnosti:

- eden od notranjih kotov v trikotniku je 120° , 90° ali 60°
- obseg je po številski vrednosti enak ploščini

To pot si oglejmo celoštevilске trikotnike, katerih ploščina je celo (naravno) število. Takim trikotnikom pravimo *Heronovi trikotniki*. Imamo naravni števili m in n , ki nista hkrati 1.

Z njima tvorimo izraze za stranice a , b in c :

$$a = m(1 + n^2); \quad b = n(1 + m^2) \quad \text{in} \quad c = (m + n)(mn - 1)$$

Dokažimo, da so a , b in c stranice trikotnika, ki ima za ploščino celo število.

- Najprej dokažemo, da je vsota poljubnih dveh stranic večja od tretje:

$$\begin{aligned} a + b &= \frac{(m + mn^2)}{2} + \frac{(n + nm^2)}{2} = mn^2 + nm^2 + m + n \\ c &= m^2n + mn^2 - m - n \end{aligned}$$

Očitno je vsota $(a + b)$ za $2(m + n)$ večja od c !

1. Podobno pokaži, da velja: $(a + c) > b$ in $(b + c) > a$!

- Dokažimo še, da je ploščina celo število. Izraze za strani-

ce a , b , c vstavimo v Heronov obrazec za ploščino trikotnika:

$p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ in upoštevamo, da je

$$s = (a + b + c) / 2$$

$$\begin{aligned} \text{Tako dobimo: } p &= \sqrt{(mn^2 + nm^2)(m^2n - m)(mn^2 - n)(m + n)} \\ &= (mn^2 + nm^2)(mn - 1) \end{aligned}$$

Tudi Heronovi trikotniki niso brez zanimivosti. Oglejmo si samo nekatere:

2. Pokaži, da je v Heronovih trikotnikih polmer trikotniku včrtanega kroga vedno naravno število!

3. Naravni števili m in n imenujemo generatorja stranic Heronovega trikotnika. Kako ju je treba izbrati, da bo polmer Heronovemu trikotniku očrtanega kroga tudi naravno število?

4. Ali obstaja Heronov trikotnik, v katerem so višine stranic naravna števila?

5. Določi dolžine stranic Heronovega trikotnika z najmanjšim obsegom!

6. Pokaži, da je vsak pravokotni trikotnik s celoštevilskimi stranicami tudi Heronov trikotnik!

Danijel Bezek

1. Stranica b je za $2n(mn - 1)$ manjša od vsote stranic $(a+c)$ in stranica a je za $2m(mn - 1)$ manjša od vsote stranic $(b+c)$.
2. $p = \rho s \Rightarrow \rho = p/s = mn - 1$
3. $p = abc/4r \Rightarrow r = abc/4p = (1 + n^2)(1 + m^2)/4$
 Produkt $(1 + m^2)(1 + n^2)$ je deljiv s 4, če sta m in n lihi števili.
4. $v_a = 2p/a = 2n(m + n)/(1 + n^2)$
 $v_b = 2p/b = 2m(m + n)/(1 + m^2)$
 $v_c = 2p/c = 2mn/(mn - 1)$
 Vsi trije imenovalci morajo biti sodi, zato sta m in n lihi števili. Število $(mn - 1)$ je potem sodo in je tuje proti mn . Če naj bo v_c celo število, mora biti $mn - 1 = 2$. Od tod $mn = 3$. Vstavimo $m = 3$ in $n = 1$ v izraz za v_a in v_b in se prepričamo, da v_b ni naravno število.
5. Za $m = 2$ in $n = 2$ dobimo trikotnik s stranicami $a = 10$, $b = 10$ in $c = 12$. Okrajšamo z 2 in dobimo $a' = 5$, $b' = 5$ in $c' = 6$!
6. Za pravokotni trikotnik s celoštevilskimi stranicami velja: $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$ in $c = u^2 + v^2$ (glej Presek - 4/1977/78). Ploščina je: $p = ab/2 = (u^2 - v^2)uv$.

Danijel Bezek

Potrebne so tri zarez:

0 1 2 6 9, 0 1 4 7 9, 0 2 5 8 9, 0 3 7 8 9

Roman Rojko
