

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 31 (2003/2004)

Številka 6

Strani 338-341

Marijan Prosen:

UPORABA VERIŽNIH ULOMKOV V ASTRONOMIJI

Ključne besede: astronomija, koledar, približki, verižni ulomki, saros, Marsove opozicije, velike opozicije Jupitra.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/31/1575-Prosen.pdf>

© 2004 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

UPORABA VERIŽNIH ULOMKOV V ASTRONOMIJI

V astronomiji pogosto računajo s približki (npr. pri koledarju). Zelo primerno sredstvo za ugotavljanje približkov pa so verižni ulomki. Navedli bomo tri zanimive primere.

1. Že davno so mezopotamski opazovalci neba opazili, da se Lunini in Sončevi mrki ponavljajo vsakih 18 let in 10 dni. To periodo so imenovali *saros*. Po njej so napovedovali nastop mrkov, čeprav niso vedeli, kje je vzrok za to periodo in zakaj ima le-ta takšno številčno vrednost. To so ugotovili dosti pozneje, šele po natančnem proučevanju gibanja Lune.

Vprašajmo se, kolikšen je obhodni čas Lune okrog Zemlje. Odgovor je lahko različen, pač glede na to, za kateri obhodni čas gre. Astronomi razlikujejo najmanj pet takih obhodnih časov, imenovanih mesec, od katerih pa nas zdaj zanimata le dva.

- *Sinodski mesec*, to je obhodni čas Lune okrog Zemlje glede na Sonce oz. čas med dvema zaporednima enakima Luninima menama (npr. od ščipa do prvega naslednjega ščipa). Ta čas traja 29,5306 dni.
- *Vozelski mesec*, to je čas, v katerem se Luna vrača k istemu vozlu svojega tira (dvižnemu ali pa padnemu; vozle je presek Lunega tira z ravnino Zemljinega tira). Ta mesec traja 27,2122 dni.

Mrki nastopajo le ob ščipu (polni luni) in mlaju (prazni luni) zelo blizu enega od vozlov, ko ležijo Zemlja, Sonce in Luna na isti premici. Če je npr. danes mrk, bo takšen mrk nastopil ponovno čez toliko časa, da bo celo število x vozelskih mesecev enako celemu številu y sinodskih mesecev. Ta čas dobimo, če rešimo enačbo $27,2122x = 29,5306y$, ki jo preoblikujemo v sorazmerje $\frac{x}{y} = \frac{295306}{272122}$. Natančna rešitev te enačbe je npr. $x = 295306$ in $y = 272122$.

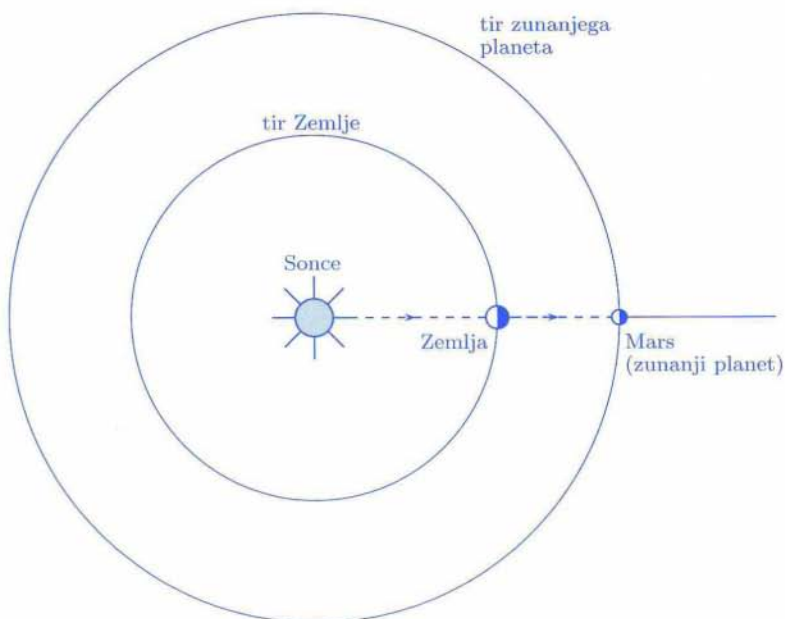
Zapisano enačbo pa lahko rešimo tudi približno. Ulomek $\frac{295306}{272122}$ razvijemo v verižni ulomek. Najprej je

$$\frac{295306}{272122} = 1 + \frac{23184}{272122} = 1 + \frac{1}{11 + \frac{17098}{23184}}.$$

Če bi tako nadaljevali, bi na koncu dobili

$$\frac{295306}{272122} = 1 + \frac{1}{11 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{17 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7}}}}}}}}}$$

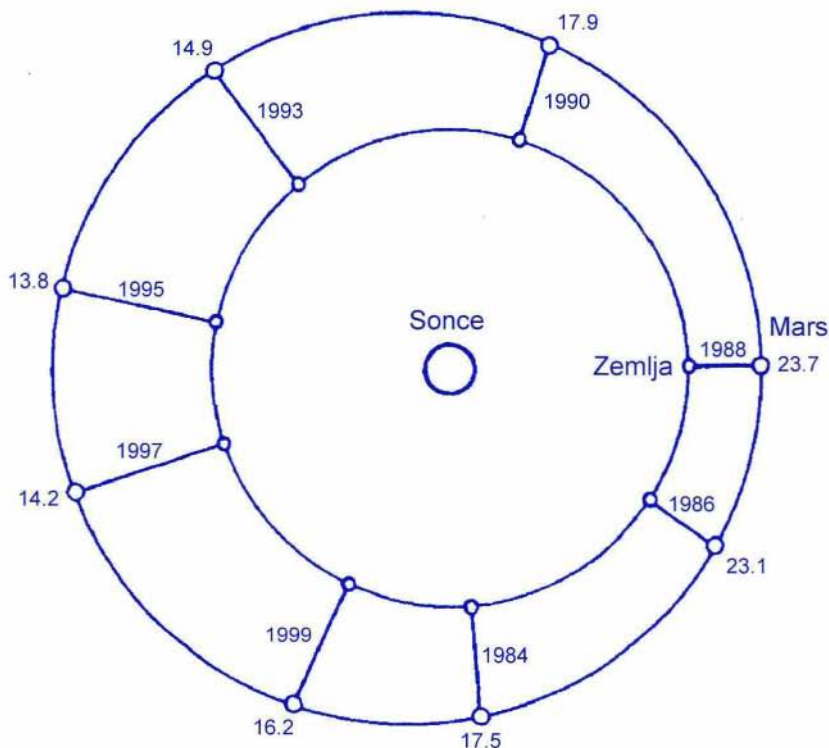
Iz tega verižnega ulomka dobimo naslednje približke: $\frac{12}{11}$, $\frac{13}{12}$, $\frac{38}{35}$, $\frac{51}{47}$, $\frac{242}{223}$, $\frac{1019}{939}$, ... Peti ulomek v vrsti je že dovolj dober približek, saj daje zadovoljivo natančnost. Zadržimo se pri njem. Torej vzamemo $x = 242$ in $y = 223$. Perioda, ko se mrki ponovijo, je enaka 223 sinodskim ali 242 vozelskim mesecem. Preračunano je to $6585\frac{1}{3}$ dni ali 18 let in 11,3 dni oz. 10,3 dni glede na to, ali pride v saros štiri ali pet prestopnih let.



Slika 1. Lega zunanjega planeta ob opoziciji s Soncem.

2. Planet Mars je bil konec avgusta 2003 v opoziciji s Soncem. To pomeni, da je bil, gledano z Zemlje, na nasprotni strani kot Sonce. Kadar je planet v opoziciji s Soncem, je viden vso noč, saj vzhaja, ko Sonce zahaja. Planet je takrat tudi najbližje Zemlji in ga lahko dobro opazujemo. Mars je približno vsaki dve leti v opoziciji s Soncem. To so navadne opozicije. Približno vsakih 15 let pa pride do tako imenovanih velikih opozicij, ko se Mars dosti bolj približa Zemlji kot ob navadnih opozicijah. Velike opozicije rdečega planeta so bile npr. 1939, 1956, 1971, 1985.

Malokdo ve, zakaj se ta dogodek ponavlja vsakih 15 let. Takole je s to stvarjo. Obhodni čas Zemlje okrog Sonca je $365\frac{1}{4}$ dneva, obhodni čas Marsa pa 687 dni. Vzemimo, da sta danes oba planeta v najmanjši medsebojni oddaljenosti ob veliki opoziciji. V takšni oddaljenosti bosta



Slika 2. Opozicije Marsa do leta 1999. Zaradi nazornosti je ekscentričnost Marsovega tira pretirana. Številke ob Marsu povedo navidezni premer planeta ob opoziciji.

spet čez toliko časa, ko bo celo število zemeljskih let x enako celemu številu marsovskih let y . Rešiti je treba enačbo (v celih številih) $365\frac{1}{4}x = 687y$ ali $\frac{x}{y} \doteq 1,88 = \frac{47}{25}$. Ulomek razvijemo v verižni ulomek

$$\frac{47}{25} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7 + \frac{1}{3}}}$$

Če vzamemo prve tri člene, dobimo že dober približek

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7}} = \frac{15}{8}$$

To je čez 15 zemeljskih ali 8 marsovskih let. Torej se velike Marsove opozicije ponavljajo vsakih 15 let (zaradi poenostavitve naloge smo vzeli 1,88 namesto 1,8809).

3. Tako lahko ugotovimo tudi periodičnost največjih približevanj Jupitra. Jupitersko leto je 11,86 (točneje 11,8622) zemeljskih let. Razvijmo to v verižni ulomek:

$$11,86 = 11 \frac{43}{50} = 11 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{7}}}$$

Prvi trije členi dajo približek $\frac{83}{7}$. Velike opozicije Jupitra se torej ponavljajo vsakih 83 zemeljskih ali 7 jupiterskih let. Zadnja velika opozicija Jupitra s Soncem je bila leta 1951.

Na koncu pa še dve kratki vaji, katerih rezultat ugotovimo neposredno iz vsebine članka, pri prvi vaji od zadnje velike opozicije odštejemo 15 let, pri drugi pa prištejemo 83 let:

1. Kdaj je bila zadnja velika opozicija Marsa s Soncem?
2. Kdaj bo prva velika opozicija Jupitra s Soncem?