

# PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 31 (2003/2004)

Številka 5

Strani 294-299

Andrej Likar:

## ALI NATANČNE CEZIJEVE URE VEDNO TEČEJO ENAKO HITRO?

Ključne besede: fizika, merjenje časa, splošna teorija relativnosti, merjenje razdalj, orientacija, GPS, Global Positioning System, satelitska navigacija.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/31/1569-Likar.pdf>

© 2004 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

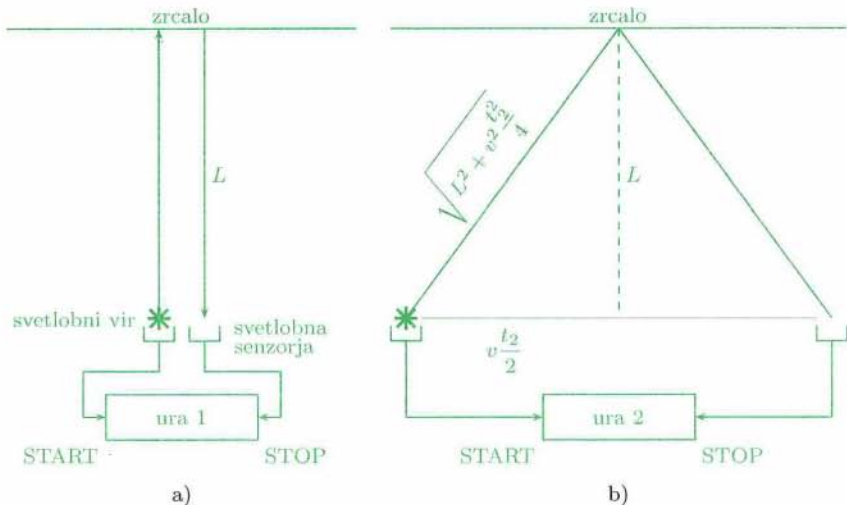
## ALI NATANČNE CEZIJEVE URE VEDNO TEČEJO ENAKO HITRO?

V prejšnjem zapisu v Preseku smo govorili o orientaciji z natančnimi urami. Če je ura v sprejemniku naravnana skladno z urami v satelitih, ki oddajajo signale, lahko iz njihovih leg in razdalj do sprejemnika natančno izračunamo lego sprejemnika. Razdalje izmerimo z merjenjem časa potovanja signalov od satelitov do sprejemnika. Čas razberemo iz ur v satelitih in ure v sprejemniku. Seveda morajo biti vse ure skrbno naravnane, da v danem trenutku vse kažejo enak čas. Ure v satelitih nadzirajo z urami iz laboratorija na Zemlji. Zdi se, da pri tem ni težav, saj so to natančne cezijeve ure, ki se v vsem letu ne zmotijo več kot za nekaj nanosekund. Ko jih enkrat uskladimo, tečejo enako leta in leta, ne glede na to, ali so v satelitu ali v laboratoriju na Zemlji, če se le med tem ne pokvarijo. Pri tem niti ne pomislimo na posebno in splošno teorijo relativnosti, ki sicer svarita, da povsem enako zgrajene in umerjene ure ne tečejo vedno enako hitro. Tega v vsakdanjem življenju nikoli ne jemljemo povsem resno. To bi morda kazalo upoštevati le, ko se ure gibljejo zelo hitro v primeri s svetlobno hitrostjo, ali če so blizu črnih lukenj. Ali res?

Videli smo, da morajo biti ure za orientacijo res zelo natančno usklajene, saj se pri premiku za 30 nanosekund med uro v sprejemniku in tisto v satelitu zmotimo pri določanju razdalje med njima za 10 m. Kljub temu, da je hitrost satelitov zelo majhna v primeri s svetlobno hitrostjo in je zemeljska gravitacija šibka, v primeri s tisto na zvezdah ali blizu črnih lukenj, so razlike v teku ur pri sistemu GPS kaj hitro opazne. V četrt ure bi bil sistem GPS za orientacijo povsem neuporaben, če razlike v teku ur ne bi upoštevali.

Na dejstvo, da gibajoče se ure ne teko enako hitro kot mirujoče, smo fiziki že nekoliko navajeni. Znana je preprosta izpeljava, ki takoj postreže s pravilno zvezo med tekom mirujoče in gibajoče se ure. Opazovalca, opremljena s povsem enako narejenima urama, merita čas med dvema dogodkoma. Prvi, gibajoči se opazovalec, v nekem trenutku odda svetlobni blisk (prvi dogodek) in hkrati sproži svojo uro. Blisk se odbije od zrcala naravnost nazaj k opazovalcu in čez čas, preko za svetlobo občutljivega elektronskega vezja, ustavi uro (drugi dogodek). Za tega opazovalca sta se oba dogodka zgodila na istem mestu. Dogajanje spremlja tudi mirujoči opazovalec s svojo uro, ki je opremljena s svetlobnima senzorjema START in STOP, ki jo bodisi sprožita ali ustavita (glej sliko 1). V trenutku, ko gre prvi opazovalec mimo senzorja START in odda svetlobni blisk, ga senzor prestreže in hip nato, ko sunek po vodniku pripotuje do ure, jo sproži. Senzor STOP je modro postavljen prav na mestu, kjer prvi opazovalec

ustavi svojo uro in hkrati sproži senzor STOP, ki hip nato ustavi uro. Ker je zamuda pri sprožitvi enaka zamudi pri ustavitvi, mirujoča ura pokaže čas med obema dogodkoma, kot ju opazi mirujoči opazovalec.



Slika 1. K izpeljavi razmerja med tekom mirujoče in gibajoče se ure. Slika a) kaže razmere, kot jih vidi gibajoči se opazovalec, b) pa razmere, kot jih vidi mirujoči opazovalec.

Zanj se dogodka zgodita na različnih mestih, a je do pravega časa prišel z ustrežno postavitevjo ure in senzorjev. Ali uri pokažeta enak čas? Ne, pravi posebna teorija relativnosti, pritegnejo pa ji tudi izkušnje. Gibajoča se ura pokaže krajši čas, teče torej počasneje. Koliko krajši, pokaže preprost račun. Prvi, gibajoči se opazovalec, izmeri čas

$$t_1 = \frac{2L}{c},$$

kjer je  $L$  razdalja od svetila do stropa,  $c$  pa svetlobna hitrost. Mirujoči opazovalec pa vidi, da je pot svetlobe daljša, saj se prvi opazovalec giblje in prestreže svetlobo na drugem mestu, kot jo je oddal. Iz slike 1 razberemo, da je pot svetlobe zanj

$$2L' = 2\sqrt{L^2 + v^2\left(\frac{t_2}{2}\right)^2}$$

in zato velja

$$t_2 = \frac{2L'}{c}.$$

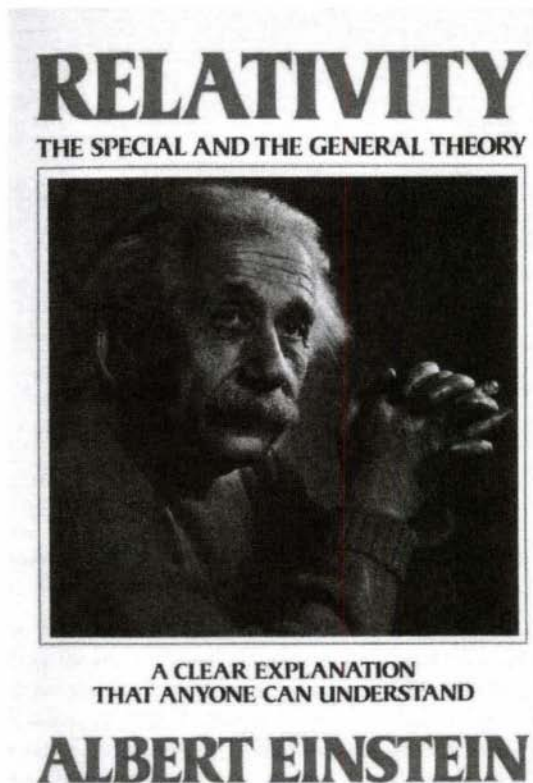
Ker je v izrazu za  $2L'$  tudi neznanica  $t_2$ , pridemo do rezultata s krajšim računom

$$t_2 = \frac{t_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Seveda bo pozorni bralec takoj našel dozdevno napako v računu; ugovarjal bo, da za oba opazovalca hitrost svetlobe ne more biti enaka. To je povsem res, če se opiramo na vsakdanje izkušnje, ki jih imamo z gibajočimi se telesi. A za svetlobo te izkušnje ne veljajo. Svetloba potuje v vakuumu za vsakega opazovalca enako hitro, kar pomeni, da smo računali prav. Do tega spoznanja je prvi prišel Albert Einstein, ki ga je zanimal skladen opis elektromagnetnih pojavov, ko jih opazujemo iz različnih, med seboj gibajočih se inercialnih opazovalnih sistemov.

O tem, da tečejo gibaajoče se ure počasneje kot mirujoče, ne dvomi več noben fizik. S skrbnimi poskusi se razliko v teku ur da celo neposredno izmeriti. A zakaj bi šle ure različno hitro, če so na različnih višinah, kar trdi splošna teorija relativnosti? To je tudi za fizika teže sprejemljivo. Le zakaj naj bi šla ura v kleti počasneje kot tista na podstrešju, če so pogoji na obeh mestih povsem enaki? Težnost že ne more toliko vplivati, saj je na obeh mestih skoraj enaka. Pa tudi uri sta zgrajeni tako, da teža sama ne vpliva na njun tek, saj nihajo v njej deli atomov, ti pa svojih lastnosti zaradi teže ne spreminjajo.

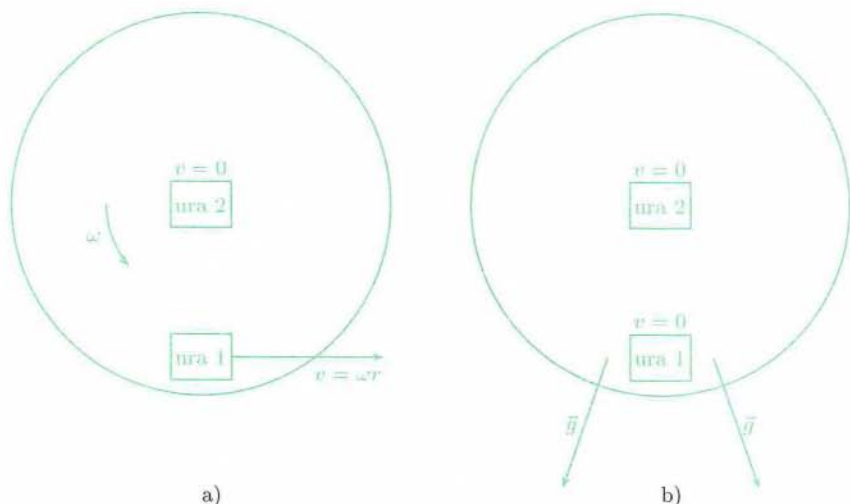
Nekoliko bliže bomo splošni teoriji relativnosti, če si ogledamo obnašanje ur v vrtečem se opazovalnem sistemu. Razpravo bomo povzeli po samem avtorju splošne teorije relativnosti, Albertu Einsteinu. Leta 1916 je v nemščini napisal knjižico o posebni in splošni teoriji relativnosti. Na vsega 114 straneh je v 32-ih poglavjih opisal obe teoriji tako, da ju lahko razume vsak, ki obvlada le Pitagorov izrek in ulomke ter mu ni žal časa in truda, da pozorno sledi mojstrski razlagi velikega fizika. Že do leta 1952 je izšlo 15 ponatisov te knjižice, pozneje pa še več. Vsakdo, ki knjižico prebere, lahko uvidi, da Einstein ni bil le izjemen fizik, temveč tudi izvrsten pedagog, kljub temu, da je mnogo raje raziskoval, kot se ukvarjal s študenti. Morda je v knjižici opisal tudi del svojih razmišljanj, ko je gradil obe teoriji.



Slika 2. Ovitek knjižice v angleškem prevodu, v kateri Einstein sam razlaga teorijo relativnosti nefizikom.

O vrtečem se opazovalnem sistemu je Presek že pisal. Ni si ga težko predstavljati, saj smo se kot otroci mnogokrat vozili na vrtiljaku. Razmere, ki jih tu izkusimo, so tako nenavadne, da ponekod v zabaviščnih parkih ponujajo nekaj minut življenja v takem sistemu. Tudi površje Zemlje je vrteči se sistem, a so sistemske sile zaradi počasnega vrtenja Zemlje v vsakdanjem življenju povsem zanemarljive.

Predstavljajmo si torej vrtiljak v obliki vrteče se plošče s sedeži na njenem robu. Kotna hitrost naj bo  $\omega$ . Postavimo dve uri v tak sistem, eno v os vrtenja, drugo pa posadimo na sedež. Opazovalec, ki miruje ob vrtiljaku vidi, da se ura v osi ne premika, ura na sedežu pa se giblje s hitrostjo  $v$ . Zanj je povsem jasno, da gibajoča se ura teče počasneje kot mirujoča.



Slika 3. a) Uri 1 in 2, kot ju vidi opazovalec ob vrtiljaku in b) opazovalec, ki sedi na njem.

In res, po določenem času pokaže ura v osi več kot ura na sedežu. Če smo sprejeli posebno teorijo relativnosti, se nam to zdi povsem naravno. V škripcih pa je opazovalec, ki sedi na enem od stolov na vrtiljaku. Zanj uri mirujeta, pa kljub temu ne tečeta enako hitro. Le zakaj? Morda zato, ker je vrteči se opazovalni sistem nekaj posebnega; v njem deluje tudi vodoravna sila teže. Res, ko sedimo na sedežu, čutimo, da nas teža potiska ne le navzdol, temveč tudi v vodoravni smeri na naslonjalo sedeža. Morda je presenetljivo, da opazovalec pripiše težnosti to vodoravno silo, a je do tega povsem upravičen, še posebej, ker trdno verjame v osnovna načela splošne teorije relativnosti. Nikakor namreč ne more s poskusi dognati, da ta sila ni teža. Opazovalec ob vrtiljaku seveda vidi le centripetalno silo, ki omogoči, da se vse stvari na vrtiljaku gibljejo po krožnicah. Opazovalec na vrtiljaku torej mora priznati, da teče ura, ki je zanj nižje, počasneje kot ura, ki je više. Razliko v teku pripiše težnostnemu polju, v katerem so ure.

Hitro lahko izračunamo razmerje teka obeh ur. Ker je tek enak za oba opazovalca (oba po določenem času preprosto pogledata koliko kažeta uri), za opazovalca ob vrtiljaku pa že vemo, da velja

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

kjer se indeks 2 nanaša na mirujočo, 1 pa na gibajočo se uro. Če je  $t_1$  enak eni sekundi, je torej  $t_2$  daljši, ura na obodu gre počasneje kot ura na sredi. Seveda mora opazovalec na vrtiljaku drugače zapisati to enačbo, ker zanj obe uri mirujeta. Ker velja

$$v = \omega r,$$

dobimo za razmerje  $t_2/t_1$

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}}.$$

Če je razmerje hitrosti  $v/c$  majhno, lahko zapišemo

$$\frac{t_2}{t_1} = 1 + \frac{\omega^2 r^2}{2c^2}.$$

Ni težko pokazati, da je izraz  $m\omega^2 r^2/2$  enak delu, ki ga moramo opraviti, da telo z maso  $m$  prenesemo z roba vrtiljaka v sredino. Temu delu, deljenemu z maso  $m$ , pravimo tudi negativni potencial in ga označimo z  $-\Phi$ . Za razmerje teka ur velja potem preprosta enačba:

$$\frac{t_2}{t_1} = 1 - \frac{\Phi}{c^2}.$$

Rezultat velja za vsako gravitacijsko polje in tudi za polje Zemlje, če namesto  $\Phi$  pišemo razliko potencialov  $\Delta\Phi$ . Ura na satelitu gre torej hitreje kot tista na Zemlji. Razmerje  $\frac{t_2}{t_1}$  je sicer majhno:

$$\frac{t_2}{t_1} - 1 = \frac{\Delta t}{t_1} = \Delta\Phi/c^2 \approx gh/c^2 = 1,6 \cdot 10^{-10},$$

a bi kljub temu v eni minuti ura na satelitu prehitela uro na Zemlji za 10 ns, kar pri uporabi GPS seveda prinese hitro opazno napako.

V navigacijskem sistemu GPS morajo upoštevati še druge popravke, ki izvirajo iz teorije relativnosti. Tek ur je potrebno popravljati zaradi gibanja satelitov in površja Zemlje, upoštevati, da ni absolutne sočasnosti in upoštevati, da Zemlja ni povsem okrogla.

Ker se vse bolj zanašamo na satelitsko navigacijo, je nekdanja oddaljena teorija relativnosti postala del vsakdana.