

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik **31** (2003/2004)

Številka 1

Stran 3

Ivan Vidav:

NALOGA ZA SPRETNE (IN POTRPEŽLJIVE) RAČUNARJE

Ključne besede: naloge, matematika, algebra, geometrija, polinomi.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/31/1538-Vidav.pdf>

© 2003 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

NALOGA ZA SPRETNE (IN POTRPEŽLJIVE) RAČUNARJE

Naj bosta x in y poljubni od nič različni realni števili povezani z enačbo

$$y^2 = x(x^2 + 5x - 32). \quad (1)$$

Oglejmo si zdaj trikotnik s stranicami

$$\begin{aligned} a &= (32 - x^2)y + x(x^2 + 32), & b &= (32 - x^2)y - x(x^2 + 32), \\ c &= 2x(x^2 + 8x - 32). \end{aligned} \quad (2)$$

Dokazi, da se v tem trikotniku izražajo ploščina p in dvojni težiščnici $2t_a$ in $2t_b$ kot polinomi spremenljivk x in y s celimi koeficienti!

Pripomba 1. Težiščnico t_a , ki sega od središča stranice a do nasprotnega oglišča, izračunamo iz enačbe

$$4t_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2.$$

Podobno dobimo t_b iz enačbe

$$4t_b^2 = 2(a^2 + c^2) - b^2.$$

Pripomba 2. Če sta števili x in y , ki zadoščata enačbi (1), racionalni, nam dajo obrazci (2) trikotnik z racionalnimi stranicami a , b in c , v katerem se tudi ploščina in dve težiščnici izražajo z racionalnimi števili. Npr. $x = -1$ in $y = 6$ zadoščata enačbi (1). Pripadajoči trikotnik ima stranice $a = 153$, $b = 219$, $c = 78$. Njegova ploščina je $p = 3780$, težiščnici pa sta $t_a = 291/2$ in $t_b = 105/2$.

Obstaja neskončno parov racionalnih števil x , y , ki zadoščajo enačbi (1).

Ivan Vidau

Rešitev je na str. 27.

NALOGA ZA SPRETNE (IN POTRPEŽLJIVE) RAČUNARJE – Rešitev s str. 3

Račun pokaže, da se ploščina trikotnika in težiščnici izražajo takole:

$$p = 4x^2(x^4 - 80x^2 + 1024),$$
$$2t_a = (x^2 + 32)y + 3x(x^2 - 32) \quad \text{in} \quad 2t_b = (x^2 + 32)y - 3x(x^2 - 32).$$

Na desni so polinomi spremenljivk x in y s celimi koeficienti.

Pripomba. V nalogi navedeni izrazi za a , b in c niso pozitivni pri vseh parih števil x , y , ki zadoščajo enačbi $y^2 = x(x^2 + 5x - 32)$. Treba je vzeti trikotnik, ki ima za stranice absolutne vrednosti $|a|$, $|b|$, $|c|$. V Heronovem obrazcu za ploščino in v obrazcih za težiščnice pa nastopajo samo kvadrati stranic in zato morebitni negativni predznaki ne motijo pri računanju. Tudi ploščina p in dvojni težiščnici $2t_a$ in $2t_b$ so, strogo vzeto, absolutne vrednosti izrazov na desni.