

# PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 29 (2001/2002)

Številka 5

Strani 264-269

Peter Legiša:

## KRISTALNE MREŽE – 1. del

Ključne besede: matematika, geometrija, mreže, tlakovanje ravnine, razdelitve prostora, enostavni kubični sklad.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/29/1483-Legisa.pdf>

© 2002 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

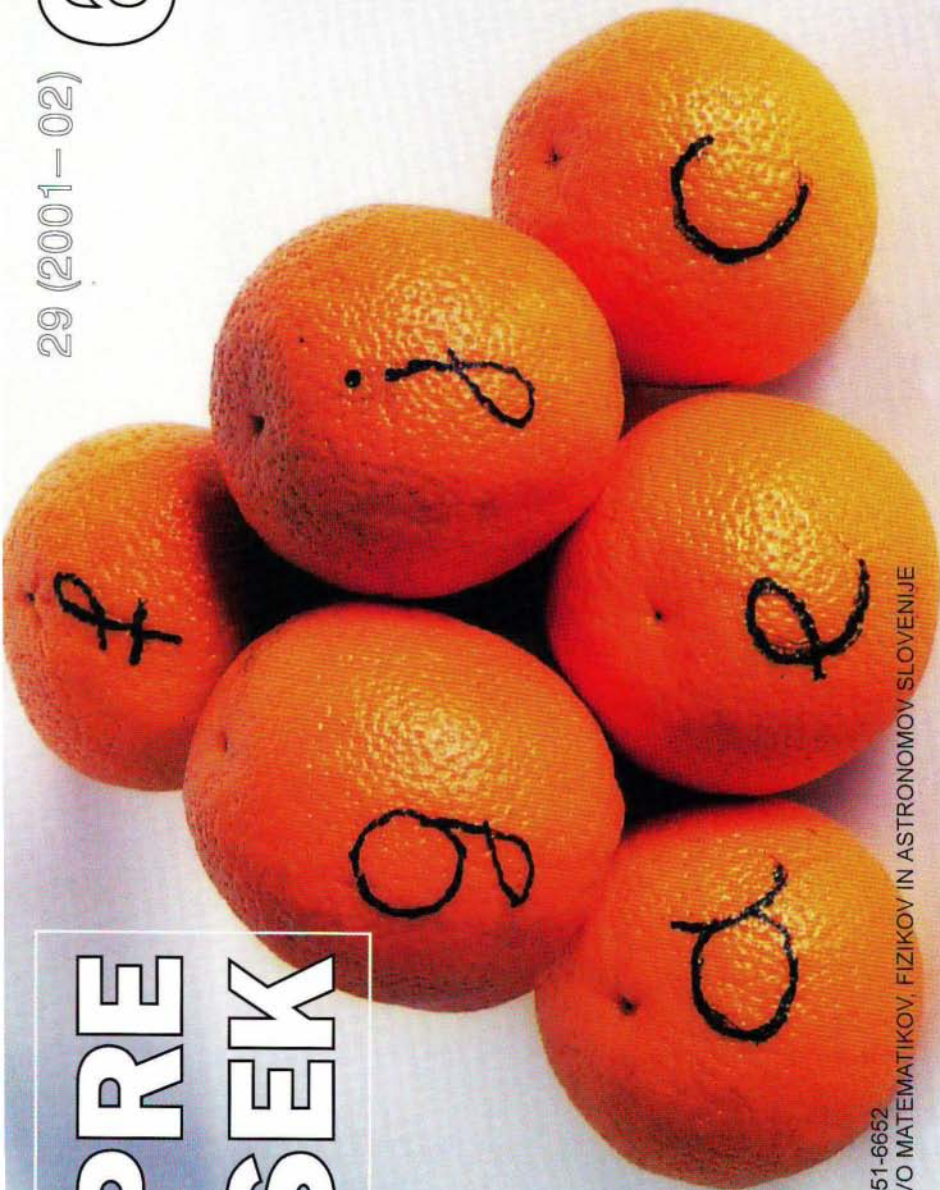
© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

29 (2001-02)

6

# PRE SEK



ISSN 0351-6652  
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

## KRISTALNE MREŽE – 2. del

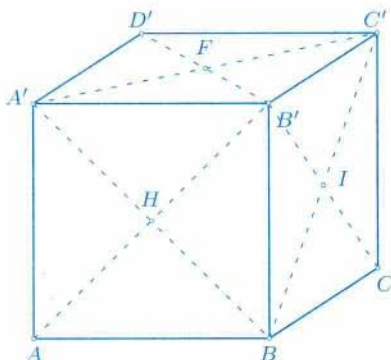
### Zlaganje krogel

V prejšnji številki Preseka smo si v članku *Kristalne mreže, 1. del*, ogledali dva načina zlaganja skladnih krogel. Tu bomo predstavili še enega.

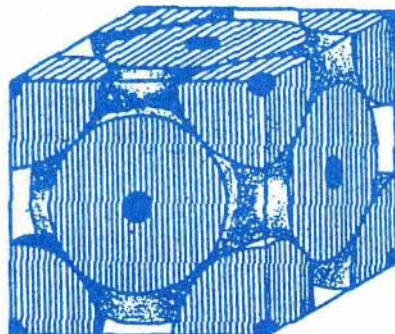
Narišimo kocko  $ABCD A' B' C' D'$  z robom  $a$ . Na njej označimo vsa oglišča in vsa središča osnovnih ter stranskih ploskev (slika 1), to je skupaj  $8 + 6 = 14$  točk.

Nato zlagamo skladne kopije te “osnovne celice”, ki ji pravimo “*ploskovno centrirana kocka*”, tako da imata sosednji kocki skupna štiri oglišča.

Oglišča in središča mejnih ploskev tako zloženih kock sestavljajo množico točk v prostoru. Kot je razvidno iz vprašanja 3 na koncu tega članka, je ta množica točk *trirazsežna mreža*, kakršno smo opisali v prvem delu članka o kristalnih mrežah.



Slika 1.



Slika 2.

Vsaka točka te mreže naj bo središče krogle s polmerom

$$R = \frac{1}{4} a \sqrt{2}.$$

Na sliki 1 se potem krogla s središčem v  $H$  dotika krogel s središči v točkah  $A$ ,  $B$ ,  $A'$  in  $B'$ .

Izračunajmo delež prostora, ki ga zavzemajo krogle. V osnovni celici imamo osemkrat po eno osmino krogle in šestkrat po polovico krogle (slika 2), skupaj štiri prostornine krogle, kar je

$$4 \cdot \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Delež dobimo, če to delimo s prostornino kocke, torej z

$$a^3 = 16\sqrt{2}R^3.$$

Količnik je

$$\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \doteq 74,0\%.$$

To je več kot pri “*telesno centrirani kocki*” iz prejšnjega članka.

Veliki nemški matematik Carl Friedrich Gauss je že pred dvema stoletjema dokazal tole: Če središča krogel sestavljajo trirazsežno mrežo, ni mogoče doseči večje zapolnjenosti prostora. Zato temu načinu zlaganja krogel pravimo *kubično najgostejši sklad*.

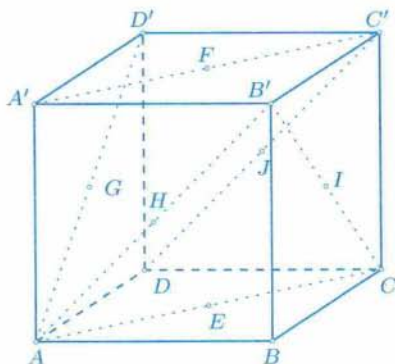
V letu 1998 je bil predstavljen izredno dolg dokaz, da tudi sicer ni mogoče zložiti krogel učinkoviteje. Dokaz je oprt na obsežna preverjanja z računalnikom.

Opozorimo pa, da obstajajo še drugi načini zlaganja krogel, ki so enako učinkoviti kot kubično najgostejši sklad.

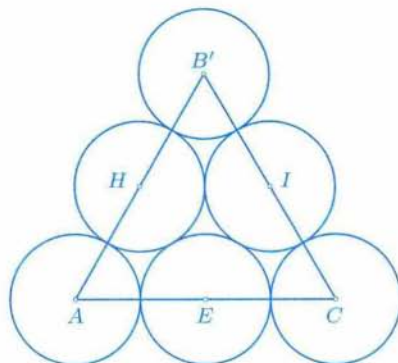
Iz osnovne celice ni takoj jasno, kako bi v praksi zložili krogle v kubično najgostejši sklad. Zato še enkrat narišimo osnovno celico (slika 3).

Točke  $A, E, C, I, B', H$  ležijo vse v isti ravnini in so središča krogel. Z malo črko označimo kroglo, ki ima središče v točki, označeni z ustrezno veliko črko. Paroma se dotikajo krogle  $a, h$  in  $e$  (saj je  $|HE| = |AH| = |AE|$ ). Se pravi, vsak par krogel iz množice  $\{a, h, e\}$  se dotika. Podobno velja za krogle iz množic  $\{e, c, i\}$ ,  $\{b', h, i\}$  in  $\{e, h, i\}$ .

Če krogle  $a, e, c, i, b', h$  pravokotno projiciramo na ravnino trikotnika  $ACB'$ , dobimo sliko 4.



Slika 3.



Slika 4.

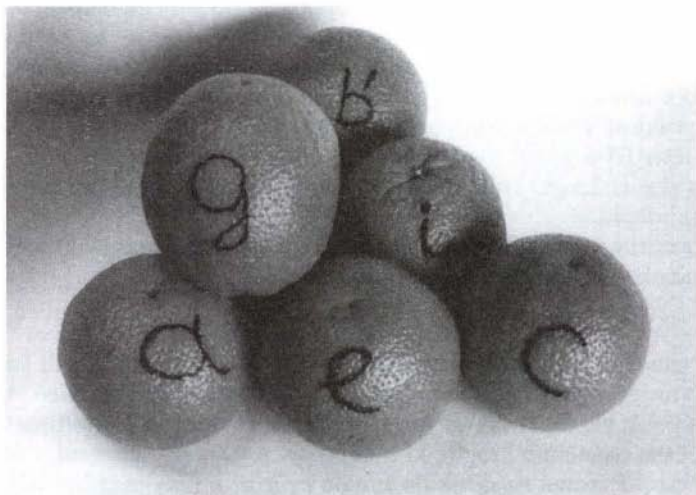
Ker je  $|GH| = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ , se  $g$  in  $h$  dotikata. Enako vidimo, da se

$g$  dotika krogel  $a, h, e,$

$j$  dotika krogel  $i, e, c,$

$f$  dotika krogel  $b', h, i.$

Zdaj vemo, kam moramo položiti krogel  $g, j, f$ . Oglejte si tudi sliko 5 in fotografijo na naslovnici.



Slika 5.

**Vprašanje 1.** Kje na sliki 4 je projekcija točke  $B$ ? (Namig: katerih označenih krogel se dotika krogla  $b$ ?)

Uporabimo zdaj pridobljeno znanje za reševanje zanimivega problema.

Relativna atomska masa aluminija je 26,98, zato ima 1 mol atomov aluminija maso  $m = 26,98$  g. Gostota aluminija je  $2,70$  kg/dm<sup>3</sup>. Aluminij kristalizira v kubično najgostejšem skladu. Določi polmer atoma aluminija.

**Rešitev.** V 1 molu je Avogadrovo število  $N_A \doteq 6,02 \cdot 10^{23}$  atomov aluminija, vsak ima torej maso  $m \cdot (N_A)^{-1}$ .

Če je  $R$  polmer atoma aluminija, ima osnovna celica rob  $a = 2\sqrt{2}R$ . Na osnovno celico odpadejo, kot smo ugotovili, 4 atomi, torej masa  $\frac{4m}{N_A}$ .

Gostota je

$$\rho = \frac{4m}{N_A \cdot a^3} = \frac{4m}{N_A \cdot 16\sqrt{2}R^3}.$$

Od tod je

$$R^3 = \frac{m}{4\sqrt{2}N_A\rho} = \frac{26,98}{4\sqrt{2} \cdot 6,02 \cdot 2,70} \cdot 10^{-29} \text{ m}^3 = \frac{269,8}{4\sqrt{2} \cdot 6,02 \cdot 2,70} \cdot 10^{-30} \text{ m}^3$$

in

$$R = \sqrt[3]{\frac{269,8}{4\sqrt{2} \cdot 6,02 \cdot 2,70}} \cdot 10^{-10} \text{ m} \doteq 1,43 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

V nadaljevanju zahtevamo od bralca več samostojnega dela.

**Vprašanje 2.** Svinec ima gostoto  $11,34 \text{ g/cm}^3$  in relativno atomsko maso 207,2. Kristalizira v kubično najgostejšem skladu. Določite polmer atoma svinca.

*Opomba.* V staljenem svincu so atomi bolj neurejeni kot v kristalu in prostora ne zapolnjujejo tako učinkovito. Zato se pri strjevanju svinec skrči.

Kovine, ki kristalizirajo v manj gostih skladih, pa pri strjevanju lahko zvečajo prostornino. Take kovine niso najbolj primerne za vlivanje.

Poseben primer je kositer, ki pri nizkih temperaturah kristalizira v manj gostem skladu kot pri sobni temperaturi. To je vzrok t.i. "kositrove kuge", ki je povzročila mnogo škode.

**Vprašanje 3.** Vrnimo se k sliki 3. Naj bo  $\mathcal{P}$  paralelepiped z osnovno ploskvijo  $B'HEI$  in s stranskim robom  $B'F$ .

- Določite preostala oglišča paralelepipeda.
- Če ima kocka rob  $a$ , določite robove paralelepipeda.
- Določite kota, ki ju  $B'F$  oklepa z  $B'H$  in  $B'I$ .
- Iz tršega papirja naredite nekaj modelov za  $\mathcal{P}$ , če rob paralelepipeda  $\mathcal{P}$  meri 6 cm. Zložite modele tako, da imata sosednja modela skupna 4 oglišča. Oglišča zloženih paralelepipedov sestavljajo mrežo središč krogel kubično najgostejšega sklada. Primerjajte s sliko 3. Da je to res prava mreža, je razvidno iz naslednje točke.
- Naj bo  $\vec{B'I} = \vec{a}$ ,  $\vec{B'H} = \vec{b}$ ,  $\vec{B'F} = \vec{c}$ . Če za izhodišče vzamemo točko  $B'$ , izrazite krajevne vektorje vseh oglišč kocke in vseh središč mejnih ploskev v bazi  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ .

