

# PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 29 (2001/2002)

Številka 4

Strani 233-237

Nada Razpet:

## REZANJE IN SESTAVLJANJE PRAVILNEGA ČETVERCA

Ključne besede: matematika, geometrija, prostorska predstavljaljivost, tetraeder, četverec, prostornina.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/29/1482-Razpet.pdf>

© 2002 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

## REZANJE IN SESTAVLJANJE PRAVILNEGA ČETVERCA

Štiri skladna telesa, iz katerih lahko sestavimo pravilni četverec, smo spoznali že v 5. številki lanskega letnika Preseka, str. 290. Tokrat pogledjmo, kaj nastane, če enemu izmed teh teles dodajamo druga telesa.

Telesa, iz katerih sestavljamo pravilni četverec, bomo označili s T4. Najdaljši rob telesa T4 naj bo  $3x$ . V omenjenem članku smo videli, da lahko iz štirih skladnih teles T4 sestavimo pravilni četverec z osnovnim robom  $4x$ . Od tod lahko hitro izračunamo prostornino  $V_t$  telesa T4:

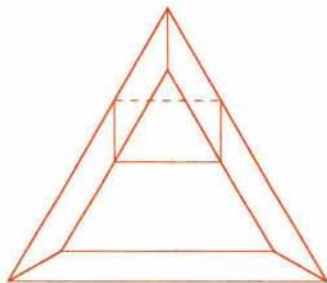
$$V_t = \frac{4x^3\sqrt{2}}{3}.$$

### Telo T4 dopolnimo do prisekane piramide

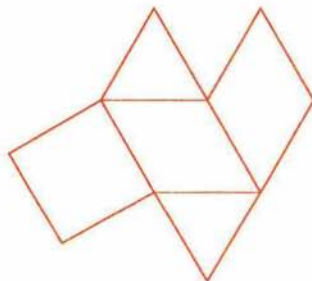
Poglejmo na telo T4 še drugače. Iz sestavljenega pravilnega četverca z robom  $4x$  vidimo, da so stranski robovi telesa T4 vzporedni z robovi pravilnega četverca, torej lahko vzamemo, da je na vogalu telesa T4 pravilni četverec z robom  $x$ . Višina  $v_1$  telesa T4 je enaka višini pravilnega četverca z robom  $x$ :

$$v_1 = \frac{x\sqrt{6}}{3}.$$

Če dodamo telesu T4 poševno prizmo, ki ima za osnovno ploskev enakostranični trikotnik, dobimo prisekano piramido, ki ima za osnovni ploskvi enakostranična trikotnika s stranicama  $3x$  in  $2x$  ter višino  $v_1$  (slika 1).



Slika 1a. Telesu T4 dodamo prizmo in dobimo prisekano pravilno tristrano piramido.



Slika 1b. Mreža dodane poševne prizme. Sestavljajo jo: dva romba, kvadrat in dva enakostranična trikotnika. Vsi liki imajo vse robove enake  $x$ . Višina prizme je  $v_1$ .

Prostornina presekanе piramide je

$$V = \frac{19x^3\sqrt{2}}{12},$$

prostornina dodane prizme  $V_d = \frac{x^3\sqrt{2}}{4}$ , njuna razlika je enaka prostornini telesa T4:  $V_t = V - V_d = \frac{4x^3\sqrt{2}}{3}$ .

### Telo T4 dopolnimo do pravičnega četrca

Dopolnimo telo T4 do pravičnega četrca z robom  $3x$ . Najprej dodajmo telo T21 (slika 2) s prostornino  $V_{21}$  na manjšo osnovno ploskev, nato pa še ob strani telo T22 (slika 3) s prostornino  $V_{22}$ .

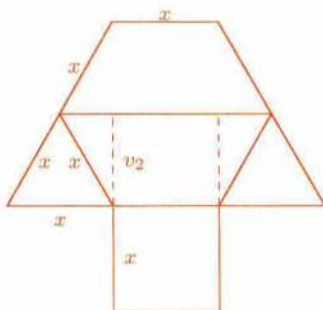
Telo T21 je sestavljeno iz treh delov: pokončne tristrane prizme in dveh polovic pravičnega četrca z robom  $x$ . Osnovna ploskev prizme je enakokraki trikotnik z osnovnico  $x$  in krakoma, ki sta višini ( $v_2$ ) enakostraničnega trikotnika z osnovnico  $x$ . Višina prizme je  $x$ . Višina  $v_3$  osnovne ploskve prizme je  $v_3 = \frac{x\sqrt{2}}{2}$  in od tod  $V_{21} = \frac{x^3\sqrt{2}}{3}$ .

Telo T22 pa dobimo, če prizmi iz telesa T21 podaljšamo višino na  $2x$ . Torej je  $V_{22} = \frac{7x^3\sqrt{2}}{12}$ .

Vsota prostornin

$$\begin{aligned} V_t + V_{21} + V_{22} &= \\ &= \frac{4x^3\sqrt{2}}{3} + \frac{x^3\sqrt{2}}{3} + \frac{x^3\sqrt{2}}{3} = \frac{9x^3\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

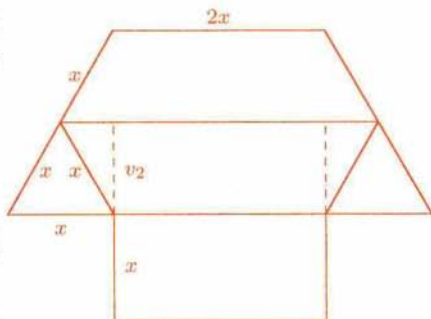
je seveda prostornina pravičnega četrca z robom  $3x$ .



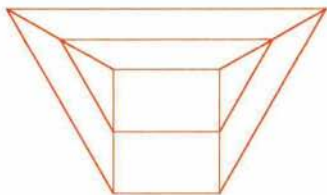
Slika 2a. Mreža telesa T21.



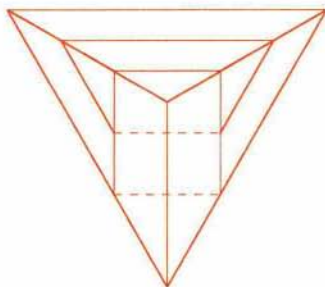
Slika 2b. Tloris telesa T21.



Slika 3. Mreža telesa T22.



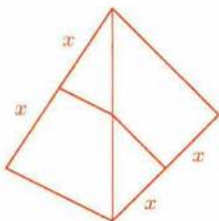
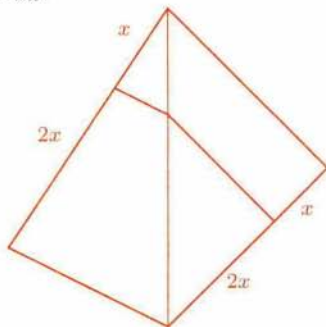
Slika 4a. Telesu T4 dodamo telo T21.



Slika 4b. Dodamo še telo T22.

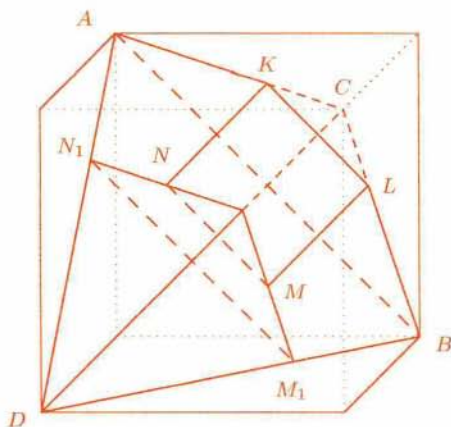
### Rezanje pravilnega četrverca

Do teles T21 in T22 pridemo z rezanjem pravilnega četrverca z robom  $2x$  oz.  $3x$  (slika 5). Dva robova pravilnega četrverca, ki sta mimobežna in drug na drugega pravokotna, sta vzporedna s presečno ravnino. Presek ravnine in pravilnega četrverca je v prvem primeru kvadrat s stranico  $x$ , v drugem pa pravokotnik s stranicama  $x$  in  $2x$ .

Slika 5a. Telo T21 je polovica pravilnega četrverca z robom  $2x$ . Pravilni četrvec razpade na dve skladni telesi.Slika 5b. Telo T22 dobimo z rezanjem pravilnega četrverca z robom  $3x$ .

### Še nekaj lastnosti telesa T4

Izračunajmo še kote med ploskvami telesa T4. Najprej se dogovorimo za oznake. Osnovni ploskvi naj bosta enakokraka trapeza  $ABLK$  in  $N_1M_1MN$ , stranske ploskve pa kvadrat  $KLMN$  in trapezi  $AKNN_1$ ,  $LBM_1M$  in  $ABM_1N_1$  (slika 6). Dopolnimo telo T4 še s četrvercem z robom  $2x$ . Dobimo četrvec z robom  $3x$ , ki mu manjka poševna tristrana enakoroba prizma z robom  $3x$ . Četrvec vložimo v kocko tako, kot kaže slika, in postavimo izhodišče koordinatnega sistema v središče kocke, osi pa vzporedno z robovi kocke.



Slika 6.

Zdaj lahko hitro izračunamo kote med ploskvami. Ploskev  $AKNN_1$  leži na ploskvi  $ACD$  z normalo  $\vec{n}_1 = (1, 1, -1)$ , ploskev  $ABM_1N_1$  pa na ploskvi  $ABD$  z normalo  $\vec{n}_2 = (1, -1, -1)$ . Torej je

$$\cos \delta_1 = \frac{1 - 1 + 1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \quad \text{in} \quad \delta_1 = 70,52^\circ$$

kot med sosednjima ploskvama pravilnega četverca.

Ploskev  $AKLB$  leži na ploskvi  $ABC$  z normalo  $\vec{n} = (1, 1, 1)$ . Ploskev  $KLMN$  je ena od stranskih ploskev poševne prizme, zato je rob  $KN$  vzporeden z robom  $CD$ . Ploskev  $KLMN$  ima normalni vektor  $\vec{n}_3 = (1, 0, 0)$ . Izračunajmo naklonski kot te ploskve proti osnovni ploskvi  $AKLB$ :

$$\cos \delta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{in} \quad \delta_2 = 54,74^\circ.$$

Kot med ravninama  $AKNN_1$  in  $KLMN$  je top, zato je

$$\cos \delta_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{in} \quad \delta_3 = 125,26^\circ.$$

Iz slike in računa lahko razberemo, da je v našem primeru kvadrat  $KLMN$  vzporeden s tisto ploskvijo kocke, na kateri leži rob  $AB$ .

