PREDALČNO NAČELO

Jakob ima v dveh žepih vsega tri jabolka. Ob tem edinem podatku lahko samo ugibamo, koliko jabolk je v posameznem od obeh Jakobovih žepov. Nekaj trdnega pa vendarle lahko izjavimo. Zapišimo vse načine, kako se dajo porazdeliti tri jabolka na dva žepa. Dobimo preglednico:

število jabolk v prvem žepu	število jabolk v drugem žepu
3	0
2	1
1	2
0	3

V prvih dveh primerih sta v prvem žepu vsaj dve jabolki; v zadnjih dveh primerih velja isto za drugi žep. Zato drži: Jakob ima v enem od obeh žepov najmanj dve jabolki; ne vemo pa, ali gre za prvi ali drugi žep.

Iz obravnavanega zgleda povzamemo predalčno načelo: *Če so v dveh predalih (žepih) tri reči (jabolka), vsebuje eden od obeh predalov (žepov) vsaj dve reči (jabolki).*

Imejmo sedaj namesto dveh žepov n predalov in namesto treh jabolk $n+1$ reči. Splošno predalčno načelo pravi: *Če je v n predalih $n+1$ ali več reči, vsebuje vsaj en predal najmanj dve od teh reči.*

Načelo je jasno; ako bi bila v vsakem predalu le ena reč, bi bilo v n predalih le n ne pa $n+1$ ali več reči. Spet pa ne vemo, v katerem od n predalov sta vsaj dve reči.

Predalčno načelo se v matematiki večkrat uporablja. Tu bomo z njim izpeljali nekaj trditev.

A. Naj bo naravno število a tuje praštevilu p; obstaja potenca a^k, $1 \leq k \leq p-1$, ki pušča pri delitvi s p ostanek 1.

Če katerokoli celo število delimo s p, dobimo za ostanek eno od števil $0, 1, 2, \ldots, p-1$; ostanek 0 se pojavi le, če je število a deljivo s p; če dajeta števili pri delitvi s p isti ostanek, je njuna razlika deljiva s p. Ker je a tuj p, je vsaka od potenc

$$a, a^2, a^3, \ldots, a^p \tag{1}$$

tuja p in ni deljiva s p. Zato se ostanki, ko delimo potence (1) s p, nahajajo med števili $1, 2, \ldots, p-1$. Števil (reči) v (1) je p, možnih ostankov (predalov) $p-1$. Po predalčnem načelu sta med potencami (1) potenci a^s, a^t z eksponentoma

$$1 \leq s < t \leq p\,, \tag{2}$$

ki pri delitvi s p puščata enak ostanek. Njuna razlika

$$a^t - a^s = a^s\left(a^{t-s} - 1\right)$$

je zato deljiva s p. Ker je p tuj a^s, mora deliti $a^{t-s} - 1$. To pomeni, da pri celem številu m velja

$$a^{t-s} - 1 = mp\,.$$

Eksponent $t - s = k$ je zaradi (2) naravno število in največ $p-1$. Zadnja enakost se zapiše tudi

$$a^k = mp + 1$$

in trditev A je dognana.

Zgled.
Naj bo $a = 8$, $p = 13$. S potenciranjem ugotovimo, da tri od potenc

$$8^j\,, \quad 1 \leq j \leq 13$$

dajejo pri delitvi s 13 ostanek 1. To so

$$\begin{aligned} 8^4 &= 4\,096 = 315 \cdot 13 + 1 \\ 8^8 &= 16\,776\,216 = 1\,290\,555 \cdot 13 + 1 \\ 8^{12} &= 68\,719\,476\,736 = 5\,286\,113\,595 \cdot 13 + 1 \end{aligned} \tag{3}$$

Pri $a = 14$, $p = 17$ od potenc

$$14^j\,, \quad 1 \leq j \leq 17$$

šele predzadnja daje pri delitvi s 17 ostanek 1; je namreč

$$14^{16} = 2\,197\,953\,337\,809\,371\,136 = 128\,114\,224\,080\,655 \cdot 17 + 1\,. \tag{4}$$

Opomba.
Trditev A se da takole dopolniti: Najmanjši naraven k, pri katerem daje potenca a^k pri delitvi s p ostanek 1, je delitelj števila $p-1$, vsi drugi takšni k so večkratniki tega delitelja. Dokaz izpuščamo, ponazoritev dopolnitve je vidna v (3) in (4).

B. Naravni števili a, n naj bosta večji od 1 in a tuj številu 10. Obstaja potenca a^k, ki ima za zadnjo števko 1, pred njo pa $n-1$ števk enakih 0.

Ravnamo podobno kot pri A. Zaradi tujosti števil a in 10 se delitev potenc

$$a, a^2, a^3, \ldots, a^{10^n} \tag{5}$$

z 10^n nikoli ne izide; za ostanke so tako možnosti $1, 2, 3, \ldots, 10^n - 1$. Potenc (5) je 10^n, možnih ostankov $10^n - 1$; po predalčnem načelu dajeta vsaj dve potenci iz (5) pri delitvi z 10^n isti ostanek, npr. potenci a^s, a^t, $s < t$. Razlika

$$a^t - a^s = a^s(a^{t-s} - 1)$$

je potem deljiva z 10^n. Faktor a^s je tuj 10^n, zato 10^n deli faktor $a^k - 1$, kjer je $k = t - s$ naravno število. Zato je $a^k - 1 = v \cdot 10^n$ pri naravnem številu v. Od tod je

$$a^k = v \cdot 10^n + 1 = v0\ldots01$$

in tu pred 1 nastopa $n-1$ ničel. Trditev B je dobljena.

Zgled.

Vzemimo $a = 3$, $n = 2$. Z računanjem zaporednih potenc $3, 3^2, 3^3, \ldots$ najdemo, da je

$$3^{20} = 3\,486\,784\,401$$

najmanjša potenca števila 3, ki se končuje na 01. Na 001 se končuje šele 3^{100}.

Opomba.

Najmanjši eksponent k za katerega drži trditev B, je delitelj števila $4 \cdot 10^{n-1}$. Dokaz spet izpuščamo, ponazoritev nudi zadnji zgled.

Naj bo a naravno število. Naravno število c, ki se začenja z nekajkrat zapored zapisanim a in se končuje z nekaj ničlami, zapišemo

$$c = a\ldots a0\ldots0\,. \tag{6}$$

Če je $a = 37$, je npr. $c = 37\,373\,700$; tu se 37 ponovi trikrat, na koncu sta dve števki 0.

C. Naj bosta a, b naravni števili; obstaja število, ki ima obliko (6) in je deljivo z b.

Glejmo $b+1$ števil

$$a, aa, aaa, \ldots, aaa\ldots a\,, \tag{7}$$

ki nastanejo, ko zapišemo a enkrat, dvakrat, ..., $b+1$-krat zapored. Ko števila iz seznama (7) delimo z b, so mogoči ostanki $0, 1, 2, \ldots, b-1$. Števil (7) je $b+1$, za ostanek je b možnosti; po predalčnem načelu sta v (7) najmanj dve števili y, x, ki dajeta isti ostanek pri delitvi z b; ker sta y, x različna, naj bo $y > x$. Razlika $y - x$ je zato naravno število deljivo z b; razlika ima tudi obliko (6), saj se y končuje z x. Trditev C je dobljena.

Zgled.

Poiščimo pri $a = 17$ najmanjše število z zapisom (6), ki je deljivo z $b = 84$. Iskano število se končuje na n ničel in ga zato zapišemo

$$17\ldots17 \cdot 10^n\,. \tag{8}$$

Ker je $84 = 4 \cdot 21$, mora biti število (8) deljivo s 4 in z 21. Prvi faktor v (8) je lih in torej tuj 4; zato mora 4 deliti drugi faktor 10^n. Najmanjši eksponent n, pri katerem to velja, je 2. Ker je 21 tuj 10^n, mora deliti prvi faktor v (8); s preizkusom preverimo, da 17 in 1 717 nista deljiva z 21, pač pa 21 deli 171 717. Iskano število je

$$17\,171\,700 = 84 \cdot 204\,425\,.$$

Če številu 17 171 700 pritaknemo nekaj ničel ali spredaj pripišemo nekajkrat skupino števk 171 717, so dobljena števila še zmeraj deljiva s 84. Števil oblike (6), deljivih s 84, je tako neskončno mnogo.

Č. Če izmed zaporednih naravnih števil,

$$1, 2, 3, \ldots, 2n-1, 2n\,, \quad n \geq 2 \tag{9}$$

izberemo $n+1$ števil, sta med njimi vsaj dve zaporedni.

Iz zaporedja (9) izbrana števila

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1}$$

sestavljajo množico M; seveda je

$$1 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1} \leq 2n\,.$$

Števila množice M razdelimo na dva razreda. Število x iz M je v prvem razredu M_1, če je vsaj eno od števil $x-1$, $x+1$ v M, in v drugem razredu M_2, če nobeno od števil $x-1$, $x+1$ ni v M. Jasno je, da vsako število iz M pade ravno v enega od obeh razredov M_1, M_2. Ker je $n \geq 2$, je $n+1 \geq 3$; tako so v dveh razredih vsaj tri števila. Zato po predalčnem načelu vsaj eden od razredov M_1, M_2 vsebuje vsaj dve števili zaporedja (9). Pokažimo, da je to razred M_1. Razred M_2 bi lahko zajel največ vsa liha števila

$$1, 3, 5, \ldots, 2n-1$$

ali pa največ vsa soda števila

$$2, 4, 6, \ldots, 2n\,.$$

Obakrat je to največ n števil in je potem v M_1 vsaj eno število x. Če pa je x v M_1, je z njim v M_1 vsaj eno od števil $x-1$, $x+1$; če je to $x-1$, sta $x-1$, x zaporedni naravni števili; za $x+1$ sta x, $x+1$ zaporedna. Trditev Č je dobljena.

Opomba.

Zaporedni naravni števili sta zmeraj tuji. Ugotovitev Č torej pove, da sta med $n+1$ števili, vzetimi iz zaporedja (9), vsaj dve tuji števili.

Zgled.

Pri $n = 2$ premore množica (9) števila

$$1, 2, 3, 4\,.$$

Množico M sestavljajo tri izmed teh štirih števil; vse možnosti za M so tako

$$1, 2, 3$$
$$1, 2, 4$$
$$1, 3, 4$$
$$2, 3, 4$$

V drugem primeru je le en par zaporednih naravnih števil, namreč 1, 2; tudi v tretjem primeru je en sam tak par 3, 4; v prvem primeru sta para dva, namreč 1, 2 in 2, 3; prav tako sta v zadnjem primeru dva para 2, 3 in 3, 4. Ko n narašča, se število možnosti za M hitro veča. Pri $n = 6$ vsebuje množica (9) števila

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$$

in izmed njih je možno izbrati 7 števil na 792 različnih načinov. Toliko je sedaj možnosti za M; neposredno preveriti trditev Č tu ni prav lahko.

Znameniti matematik Paul Erdös (1913–1996) je mladim nadebudnim matematikom rad zastavljal nalogo, naj dokažejo trditev:

D. Če izmed števil

$$1, 2, 3, \ldots, 2n \tag{10}$$

izberemo $n + 1$ števil, sta med njimi vsaj dve takšni, da manjše deli večje.

Vsako izmed $n + 1$ izbranih števil se da pisati v obliki

$$2^k z\,, \tag{11}$$

kjer je k nič ali naravno število, z pa liho naravno število. (Npr. $240 = = 2^4 \cdot 15$, $35 = 2^0 \cdot 35$.) Med števili v (10) je n lihih

$$1, 3, 5, \ldots, 2n - 1\,.$$

Za z v izrazitvi (11) je tako največ n možnosti. Izbrani števili damo v isti razred, če imata v zapisu (11) enak z. Ker je izbranih števil $n + 1$, možnosti za z pa kvečjemu n, imata od izbranih števil vsaj dve enak z in padeta v isti razred. To sta npr. števili x, y; ker sta različni, smemo vzeti $x < y$. Torej je

$$x = 2^s z\,, \quad y = 2^t z \quad \text{pri } 0 \leq s < t\,.$$

Ker je $\frac{y}{x} = 2^{t-s}$, x deli y. Trditev D je dognana.

Zgled.
Za $n = 3$ sestavljajo množico (10) števila

$$1, 2, 3, 4, 5, 6\,.$$

Izmed njih je mogoče izbrati štiri različna števila na 15 načinov. Med izbranimi četvericami so npr.

$$2, 3, 4, 5$$
$$3, 4, 5, 6$$
$$2, 3, 5, 6$$

V prvi četverici le 2 deli 4, v drugi le 3 deli 6; v teh dveh četvericah sta v vsaki le dve takšni števili, da manjše deli večje. V tretji četverici 2 deli 6 in 3 deli 6; tu imamo dva para števil, ko manjše deli večje.

E. Množica M, ki jo sestavlja $n+1$ različnih naravnih števil, manjših od $2n$, vsebuje vsaj eno število, ki je vsota dveh (različnih) števil iz M.

V množici M je $n+1$ naravnih števil

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1}\,, \tag{12}$$

ki so pod $2n$; zato je

$$1 \leq a_1\,, \quad a_{n+1} \leq 2n-1\,. \tag{13}$$

Zaradi (12) so razlike

$$a_2 - a_1\,,\ a_3 - a_1\,,\ \ldots,\ a_{n+1} - a_1 \tag{14}$$

različna naravna števila in naraščajo; po (13) je zadnja, največja diferenca pod $2n$. V množicah (12) in (14) je skupaj $2n+1$ naravnih števil, ki so vsa pod $2n$; to pomeni, da so zanje možne le vrednosti $1, 2, \ldots, 2n-1$. Ker je števil $2n+1$, razpoložljivih vrednosti zanje pa $2n-1$, imata po predalčnem načelu vsaj dve števili, npr. u, v, isto vrednost $u = v$. V (12) so sama različna števila, prav tako v (14); od enakih števil u, v mora zato eno biti v množici (12), drugo v množici (14). Je npr. $u = a_i$, $v = a_j - a_1$; zaradi $u = v$ je $a_j = a_i + a_1$ in števila a_1, a_i, a_j so iz M. Trditev E je dobljena.

Zgled.

Pri $n = 4$ so pod 8 naravna števila $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$; izmed njih je mogoče 5 števil izbrati na 21 načinov; toliko je možnosti za M. Ena od možnosti za M, tj. (12), je

$$3 < 4 < 5 < 6 < 7\,.$$

Tu je $3 + 4 = 7$ in nobeno drugo od števil $4, 5, 6, 7$ iz M ni vsota dveh različnih števil iz M. Če se za M vzame števila

$$1 < 2 < 3 < 5 < 6\,,$$

je $1+2=3$, $1+5=6$, $2+3=5$ in tri števila iz M so vsote dveh različnih števil iz M.

Včasih srečamo predalčno načelo v še bolj splošni obliki:

Če je $kn+1$ reči razporejenih v n predalov, vsebuje vsaj en predal najmanj $k+1$ teh reči.

Tudi to je jasno. Ko bi vsak od n predalov vseboval največ k reči, bi bilo v vseh predalih največ kn reči; ne gre, saj je reči $kn+1$.

F. Na gredo, ki ima obliko kvadrata s stranico 1 m, je posejal vrtnar 301 seme. Na gredi se najde krog s polmerom 8 cm, v katerega so padla vsaj štiri semena. (Seme vzamemo kot točko.)

Kvadratno gredo razdelimo z vzporednicami stranicam na 100 enakih kvadratkov, stranica vsakega meri 1 dm. Ker je $301 = 3 \cdot 100 + 1$, je $k = 3$, $n = 100$. Po predalčnem načelu obstaja vsaj en kvadratek ki vsebuje najmanj $k+1 = 3+1 = 4$ semena. V krogu, ki je temu kvadratku očrtan, ta semena še tem bolj gotovo ležijo. Premer kroga $2r$ je enak diagonali kvadratka; torej je $2r = \sqrt{2}\,\mathrm{dm}$ in

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{dm} = 0{,}707\ldots\,\mathrm{dm} < 8\,\mathrm{cm}\,.$$

Trditev F je dognana.

Kdaj pa kdaj naletimo tudi na tole obliko predalčnega načela:

Če je v n predalih manj kot n reči, je vsaj en predal brez teh reči.

G. V pravokotni gozdni parceli, dolgi 30 km in široki 20 km, se zadržuje 49 medvedov, njihov stalež se s časom ne spreminja. V vsakem trenutku je na parceli pravokotno območje površine $12\,\mathrm{km}^2$, na katerem ni nobenega medveda.

Težišče vsakega medveda projiciramo pravokotno na parcelo in dobimo s tem na njej 49 točk. Parcela meri $600\,\mathrm{km}^2$; razdelimo jo z vzporednicami stranicam na 50 pravokotnih parcelic dolžine 6 km in širine 2 km; torej meri parcelica $12\,\mathrm{km}^2$. Ker je parcelic 50, medvedov pa 49, vsaj na eni od parcelic ni nobenega medveda. (S tem pa še ne vemo, katera od parcelic je v izbranem trenutku "varna").

Jože Grasselli