O NAJMANJŠEM ŠTEVILU S PREDPISANIM ŠTEVILOM DELITELJEV

Katero je najmanjše naravno število, ki ima 81 deliteljev? Ali obstaja od njega manjše naravno število, ki premore več kot 81 deliteljev?

1. Z delitelji mislimo na pozitivne delitelje. Število vseh deliteljev naravnega števila n označimo z $d(n)$. Ker ima 1 le delitelj 1, je $d(1) = 1$. Vsi delitelji števila 10 so 1, 2, 5, 10, zato je $d(10) = 4$. Pri majhnih n delitelje hitro poiščemo, in ko jih preštejemo, imamo $d(n)$. Navedimo obrazec, po katerem lahko $d(n)$ izračunamo:

Naj bo p praštevilo, a naravno število. Število p^a nima drugih deliteljev kot $1, p, \ldots, p^{a-1}, p^a$; ker jih je $a+1$, velja

$$d(p^a) = a + 1\,. \tag{1}$$

Če sta p, q različni praštevili in a, b naravni števili, so vsi delitelji števila $p^a q^b$ zajeti v seznamu

$$\begin{array}{llll}
1, & p, & \ldots, p^{a-1}, & p^a \\
q, & pq, & \ldots, p^{a-1}q, & p^a q \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
q^b, & pq^b, & \ldots, p^{a-1}q^b, & p^a q^b
\end{array}$$

V vsaki vrstici je $a+1$ števil, vrstic pa je $b+1$, vseh deliteljev za $p^a q^b$ je torej $(a+1)(b+1)$ ali

$$d(p^a q^b) = (a+1)(b+1)\,. \tag{2}$$

Ko na podoben način nadaljujemo, ugotovimo: Število,

$$p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_j^{a_j}\,, \tag{3}$$

kjer so $p_1, p_2, \ldots, p_j$ različna praštevila in $a_1, a_2, \ldots, a_j$ naravna števila, premore $(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_j+1)$ deliteljev; tako je

$$d\left(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_j^{a_j}\right) = (a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_j+1)\,. \tag{4}$$

Po (4) število $3000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3$ premore $4 \cdot 2 \cdot 4 = 32$ deliteljev.

Vsako naravno število, ki je večje od 1, ima en sam zapis (3) s produktom potenc praštevil (če zapišemo praštevila po velikosti). Pri velikih naravnih številih pa navadno ni preprosto to izrazitev (3) poiskati.

2. V razdelku 1 smo vpraševali, koliko deliteljev ima dano naravno število. Sedaj vprašanje obrnimo: Katera naravna števila imajo predpisano število deliteljev? Pri danem naravnem številu m iščemo torej vsa naravna števila x, za katere je

$$d(x) = m\,. \tag{5}$$

Pri $m = 1$ premore enačba (5) eno samo rešitev $x = 1$; edino naravno število z enim deliteljem je namreč 1.

Ko v (5) vzamemo $m = 2$, iščemo vsa naravna števila z dvema deliteljema. To so ravno vsa praštevila in enačba $d(x) = 2$ ima za rešitev vsako od praštevil. Rešitev je neskončno, saj je praštevil neskončno.

V enačbi (5) naj bo sedaj $m = 3$. Po (1) je za x mogoče vzeti p^2, kjer je p praštevilo. Drugih rešitev pa enačba $d(x) = 3$ nima. Naj bo namreč x tretja ali višja potenca praštevila p ali pa x deljiv vsaj z dvema različnima prašteviloma p, q. Po (1) in (4) je za tak x vedno $d(x) \geq 4$. Vse rešitve enačbe $d(x) = 3$ so tako p^2, kjer je p praštevilo; rešitev je spet neskončno.

Kako je pri $m = 4$? Iz (1) dobimo rešitev $x = p^3$, p praštevilo, iz (2) rešitev $x = pq$, p in q različni praštevili; drugih rešitev enačba $d(x) = 4$ nima. Za p^3 je neskončno možnosti, prav tako jih je za pq.

Obravnavajmo sedaj primer $m = 8$. Iščemo x v obliki (3); zaradi (4) preide enačba $d(x) = 8$ v enačbo

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_j + 1) = 2 \cdot 2 \cdot 2\,. \tag{6}$$

Ker desne strani ne moremo bolj razstaviti, so tudi na levi lahko največ trije faktorji, torej je $j \leq 3$. Poiskati moramo rešitev enačbe (6), ko je $j = 1, 2, 3$. Za $j = 1$ dobimo

$$a_1 + 1 = 8\,.$$

Torej je $a_1 = 7$ in $x = p^7$, p praštevilo. Ko je $j = 2$, se (6) glasi

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) = 4 \cdot 2\,.$$

Dobimo $a_1 = 3$, $a_2 = 1$ in $x = p_1^3 p_2$, kjer sta p_1, p_2 različni praštevili. Rešitev $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ izpustimo, saj pripelje do istega x. Pri $j = 3$ je (6) oblike

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_3 + 1) = 2 \cdot 2 \cdot 2\,.$$

Torej je $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ in $x = p_1p_2p_3$, kjer so p_1, p_2, p_3 različna praštevila. Vse rešitve enačbe $d(x) = 8$ so tako zajete v številih

$$p_1^7,\ p_1^3p_2,\ p_1p_2p_3\,; \quad \text{kjer so praštevila } p_1, p_2, p_3 \text{ različna.} \tag{7}$$

Rešitve razpadejo na tri množice, vsaka vsebuje neskončno števil; v prvi množici je najmanjše število 2^7, v drugi $2^3 \cdot 3$, najmanjše število tretje množice je $2 \cdot 3 \cdot 5$.

Podobno ugotovimo za $m = 16$, da so vse rešitve enačbe $d(x) = 16$ zajete z množicami

$$p_1^{15},\ p_1^7p_2,\ p_1^3p_2^3,\ p_1^3p_2p_3,\ p_1p_2p_3p_4\,, \tag{8}$$

kjer so p_1, p_2, p_3, p_4 različna praštevila.

V splošnem primeru ravnamo enako kot zgoraj za $m = 2, 3, 4, 8$. Naravno število $m > 1$ izrazimo v obliki

$$m = q_1q_2 \ldots q_s\,; \quad q_1 \geq q_2 \geq \ldots \geq q_s\,, \tag{9}$$

kjer so $q_1, q_2, \ldots, q_s$ praštevila, ne nujno med sabo različna. Enakost (5) se potem glasi:

$$(a_1 + 1) \ldots (a_j + 1) = q_1q_2 \ldots q_s\,. \tag{10}$$

Ker je na desni s praštevilskih faktorjev, mora biti $j \leq s$. Za vsak $j = 1, 2, 3, \ldots, s$ iz (10) izhaja ena ali več rešitev $a_1, \ldots, a_j$; vsaka taka rešitev daje $x = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_j^{a_j}$; tu je za različna praštevila $p_1, \ldots, p_j$ neskončno možnosti in tako že vsaka rešitev $a_1, \ldots, a_j$ za (10) pripelje do neskončno rešitev x za (5). Za $m = 16$ je $s = 4$ in v (8) nastopa pet oblik za x. Če je s velik, ima enačba (10) veliko rešitev in je za x potem na razpolago veliko oblik.

3. Iz razdelka 2 vemo: Pri danem naravnem številu $m > 1$ obstaja neskončno naravnih števil, ki imajo m deliteljev; najmanjše med števili, ki premorejo natanko m deliteljev, označimo z $A(m)$. Število m si mislimo zapisano v obliki (9).

Če je $s = 1$, je $m = q_1$; ker je q_1 praštevilo, ima enačba (10) le rešitev $a_1 = q_1 - 1$. Vse rešitve enačbe $d(x) = q_1$ so tako $x = p^{q_1 - 1}$, kjer je p praštevilo; najmanjše število med temi x je $2^{q_1 - 1}$ in velja

$$A(q_1) = 2^{q_1 - 1}\,; \quad q \text{ je praštevilo.} \tag{11}$$

Če je $s = 2$, je $m = q_1 q_1$ ali pa $m = q_1 q_2$ pri praštevilih q_1, q_2 in $q_1 > q_2$. Za $m = q_1 q_1$ dobimo iz (10), da je $a_1 = q_1^2 - 1$ ali pa $a_1 = q_1 - 1$, $a_2 = q_1 - 1$. Enačba (5) ima tedaj rešitve

$$p_1^{q_1^2-1},\ p_1^{q_1-1} p_2^{q_1-1}\,; \quad p_1, p_2 \text{ sta različni praštevili.} \tag{12}$$

Za $m = q_1 q_2$, $q_1 > q_2$, je v (10) ali $a_1 = q_1 q_2 - 1$ ali pa $a_1 = q_1 - 1$, $a_2 = q_2 - 1$. To daje za enačbo (5) rešitve

$$p_1^{q_1 q_2-1},\ p_1^{q_1-1} p_2^{q_1-1}\,; \quad \text{kjer sta } p_1, p_2 \text{ različni praštevili.} \tag{13}$$

Najmanjši med števili (12) sta $2^{q_1^2-1}$ in $2^{q_1-1} \cdot 3^{q_1-1}$. Ker je $q_1 \geq 2$, je

$$2^{q_1^2-1} = 2^{q_1-1} \cdot 2^{q_1(q_1-1)} \geq 2^{q_1-1} \cdot 4^{q_1-1} > 2^{q_1-1} \cdot 3^{q_1-1}$$

in število na koncu je najmanjše med števili (12). Zato je

$$A(q_1 q_2) = 2^{q_1-1} \cdot 3^{q_1-1}\,. \tag{14}$$

Najmanjši števili v (13) sta $2^{q_1 q_2-1}$ in $2^{q_1-1} \cdot 3^{q_1-1}$. Zaradi $q_1 > q_2 \geq 2$ je

$$2^{q_1 q_2-1} = 2^{q_1-1} \cdot 2^{q_1(q_1-1)} \geq 2^{q_1-1} \cdot 4^{q_2-1} > 2^{q_1-1} \cdot 3^{q_2-1}$$

in tako

$$A(q_1 q_2) = 2^{q_1-1} \cdot 3^{q_2-1}\,. \tag{15}$$

Ko primerjamo (14) in (15), vidimo, da je

$$A(q_1 q_2) = 2^{q_1-1} \cdot 3^{q_2-1}\,; \quad q_1, q_2 \text{ praštevili } q_1 \geq q_2\,. \tag{16}$$

Na podalgi obrazcev (11) in (16) je sestavljena preglednica

$$\begin{array}{ll} A(2) = 2 & A(6) \ = A(3 \cdot 2) = 2^2 \cdot 3 = 12 \\ A(3) = 2^2 = 4 & A(7) \ = 2^6 = 64 \\ A(4) = A(2 \cdot 2) = 3 \cdot 2 = 6 & A(9) \ = A(3 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3^2 = 36 \\ A(5) = 2^4 = 16 & A(10) = A(5 \cdot 2) = 2^4 \cdot 3 = 48 \end{array} \tag{17}$$

Najmanjše od števil v množicah (7) je $2^3 \cdot 3$ in zato

$$A(8) = A(2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^3 \cdot 3 = 24\,. \tag{18}$$

Dodajmo še dva zgleda. Po kratkem računu najdemo

$$A(16) = A(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120\,, \tag{19}$$

po nekoliko daljšem pa

$$A(60) = A(5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 5\,040\,. \tag{20}$$

Najmanjše naravno število s 16 delitelji je torej 120, s 60 delitelji 5 040.

4. Zaznamujmo s $p'_1 = 2, p'_2 = 3, p'_3 = 5, p'_4 = 7, \ldots, p'_s, \ldots$ zaporedna praštevila. S številom $m = q_1 q_2 \ldots q_s$, kjer so $q_1, q_2, \ldots, q_s$ praštevila in je $q_1 \geq q_2 \geq \ldots \geq q_s$, je določeno število

$$B(q_1 q_2 \ldots q_s) = 2^{q_1 - 1} \cdot 3^{q_2 - 1} \cdot \ldots \cdot p_s'^{q_s - 1}\,. \tag{21}$$

Iz (21) najdemo

$$\begin{aligned}
&B(2) = 2 && B(6) \;= B(3 \cdot 2) = 2^2 \cdot 3 = 12\\
&B(3) = 2^2 = 4 && B(7) \;= 2^6 = 64\\
&B(4) = B(2 \cdot 2) = 2 \cdot 3 = 6 && B(9) \;= B(3 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3^2 = 36\\
&B(5) = 2^4 = 16 && B(10) = B(5 \cdot 2) = 2^4 \cdot 3 = 48
\end{aligned}$$

Dobili smo enake rezultate kot v (17); za $m = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10$ je torej $B(m) = A(m)$.

V splošnem pa števili $B(m)$ in $A(m)$ nista enaki. Po (18) je $A(8) = 24$, toda $B(8) = B(2 \cdot 2 \cdot 2) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Število $B(m)$ ima m deliteljev; to pove opredelitev (21). Ker je $A(m)$ najmanjše naravno število z m delitelji, je zmeraj

$$B(m) \geq A(m)\,. \tag{22}$$

Ni težko pokazati, da obstaja neskončno takih m, za katere v (22) velja enačaj.

Za vsako praštevilo q je zaradi (21) in (11)

$$B(q) = A(q)\,; \quad q \text{ je praštevilo.} \tag{23}$$

Pri praštevilih q_1, q_2, kjer je $q_1 \geq q_2$, je po (21) in (16)

$$B(q_1 q_2) = A(q_1 q_2)\,, \quad \text{kjer sta } q_1, q_2 \text{ praštevili in } q_1 \geq q_2\,. \tag{24}$$

Ker je praštevil neskončno, imamo v (23) in (24) neskončno naravnih števil, ko v (22) velja enačaj. Niso pa s tem opisani vsi takšni m.

Naravno število, pri katerem v (22) velja neenačaj in je torej $B(m)$ večji od $A(m)$, se imenuje *izjemno*. Da je tudi izjemnih števil neskončno, kažejo naslednji primeri.

Iz ocene

$$3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 1155 > 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 945$$

dobimo pri praštevilu q po (21)

$$B(q \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^{q-1} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 > 2^{q-1} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \,. \tag{25}$$

Števili na obeh straneh neenačaja imata enako mnogo deliteljev, namreč $16q$. Ker je $A(q \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$ najmanjše naravno število s $16q$ delitelji, iz (25) izhaja

$$B(q \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) > A(q \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)\,; \quad q \text{ praštevilo.} \tag{26}$$

Naj bo q izbrano praštevilo in p'_t najmanjše praštevilo z lastnostjo

$$p'_t > 2^q \,. \tag{27}$$

Ker je praštevil neskončno, je med njimi neskončno takih, ki so večja od 2^q. Pri vsakem danem q zato obstaja p'_t. Po (21) upoštevaje (27) izračunamo

$$B(q^t) = 2^{q-1} \cdot 3^{q-1} \cdot \ldots \cdot p'^{\,q-1}_{t-1} \cdot p'^{\,q-1}_t > 2^{q-1} \cdot 3^{q-1} \cdot \ldots \cdot p'^{\,q-1}_{t-1} \cdot 2^{q(q-1)} \,.$$

Število je na koncu enako

$$2^{q^2-1} \cdot 3^{q-1} \cdot \ldots \cdot p'^{\,q-1}_{t-1}$$

in ima q^t deliteljev tako kot $B(q^t)$. Zato je

$$B(q^t) > A(q^t)\,, \quad \text{kjer je } p'_t > 2^q \text{ in sta } p'_t, q \text{ praštevili.} \tag{28}$$

Tako v (26) kakor v (28) je zajetih neskončno izjemnih naravnih števil m, ko v (22) velja neenačaj. Seveda so še izjemna števila drugačnih oblik.

5. Rekli smo, da je $A(m)$ najmanjše naravno število z m delitelji. Zato je

$$d(A(m)) = m \,.$$

Naravno število m, pri katerem je izpolnjena enakost

$$A(d(m)) = m\,, \tag{29}$$

se imenuje *minimalno*. Ker pomeni $d(m)$ število deliteljev za m, lahko (29) preberemo: Naravno število m je minimalno, če ni manjšega naravnega števila s toliko delitelji, kot jih ima m.

Za praštevilo q je $d(2^{q-1}) = q$; po (11) je potem

$$A(d(2^{q-1})) = A(q) = 2^{q-1}\,.$$

Pogoj (29) je izpolnjen in število

$$2^{q-1}\,, \quad \text{kjer je } q \text{ praštevilo,} \tag{30}$$

je minimalno.

Pri praštevilu $q \geq 3$ iz (2) in (15) najdemo

$$A(d(2^{q-1} \cdot 3)) = A(q \cdot 2) = 2^{q-1} \cdot 3 \tag{31}$$

in število

$$2^{q-1} \cdot 3\,; \quad q \text{ liho praštevilo,} \tag{32}$$

je minimalno.

Minimalnih števil oblika (30) je neskončno, prav tako minimalnih števil oblike (32); niso pa s tem izčrpana vsa minimalna števila.

Navedimo še dve neskončni množici, katerih vsaka vsebuje le končno mnogo minimalnih števil.

Produkt vseh naravnih števil od 1 do n se imenuje n fakulteta in se označuje $n!$; za naraven n je torej

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n\,.$$

Ugotovili so: Število $n!$ je minimalno za $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, pri $n > 7$ pa število $n!$ ni minimalno.

Zaznamujmo z $v(n)$ najmanjši skupni večkratnik števil $1, 2, \ldots, n$. Dognano je: $v(n)$ je minimalno število za $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 16, 27, 28$; za vsak drugačen n pa $v(n)$ ni minimalno število.

6. Dolžni smo še odgovor na vprašanje, zastavljeno na začetku. Ker je $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, v enačbi (1) velja $s = 4$; iz rešitev te enačbe najdemo $A(81) = A(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 44\,100$. Najmanjše naravno število z 81 delitelji je tako 44 100; vsako od njega manjše naravno število ima torej manj ali več deliteljev kot 81. Število $25\,200 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$ je manjše od $44\,100$ in premore $5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 90$ deliteljev. Čeprav je $44\,100$ najmanjše naravno število z 81 delitelji, obstaja vsaj eno od njega manjše naravno število, ki ima več kot 81 deliteljev.

Naloge

1. Med števili $m = q_1 q_2 q_3$, kjer so q_1, q_2, q_3 praštevila in $q_1 \geq q_2 \geq q_3$, je izjemno le število $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Razen za $q_1 = q_2 = q_3 = 2$ velja zmeraj $B(q_1 q_2 q_3) = A(q_1 q_2 q_3)$. Preveri to trditev.
2. Izpelji, da je $A(16) = 120$, $A(60) = 5\,040$.
3. Pokaži, da je $A(2^6) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$.
4. S. Ramanujan (1887–1920) imenuje naravno število $m > 1$ *zelo sestavljeno*, če je $d(n) < d(m)$ za vsak naraven $n < m$. To pomeni, da je zelo sestavljeno število m najmanjše naravno število z $d(m)$ delitelji. Ker je tako $A(d(m)) = m$, je zelo sestavljeno število obenem minimalno število. Minimalno število pa ni zmeraj zelo sestavljeno; po (30) je $2^4 = 16$ minimalno število, ni pa zelo sestavljeno, saj je $12 < 16$, toda
$$d(12) = d(2^2 \cdot 3) = 6 > 5 = d(2^4) = d(16)\,.$$
Poišči še kakšno minimalno število, ki ni zelo sestavljeno.
5. Pri praštevilu q je po (30) število 2^{q-1} minimalno. Ker za $q \geq 5$ drži ocena
$$2^{q-1} = 2^{\frac{q-1}{2}} \cdot 2^{\frac{q-1}{2}} \geq 2^{\frac{q-1}{2}} \cdot 4 > 2^{\frac{q-1}{2}} \cdot 3\,,$$
velja
$$d\left(2^{\frac{q-1}{2}} \cdot 3\right) = \left(\frac{q-1}{2} + 1\right) \cdot 2 = q + 1 > q = d(2^{q-1})$$
in vidimo, da minimalno število 2^{q-1} ni zelo sestavljeno. Praštevil $q \geq 5$ je neskončno; med neskončno mnogo minimalnimi števili 2^{q-1}, $q \geq 5$ pa nobeno ni zelo sestavljeno. Na podoben način ugotovi: Če je q praštevilo, $q \geq 11$, minimalno število $2^{q-1} \cdot 3$ ni zelo sestavljeno.
6. Sestavi preglednico števil $d(m)$ za m od 2 do 200; iz nje vidiš: Vsa zelo sestavljena števila do 200 so $2, 4, 6, 12, 24, 36, 48, 60, 120, 180$. (Čeprav je 2 praštevilo, je tudi zelo sestavljeno število.)
7. Ali je minimalno število $A(100) = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$ zelo sestavljeno (glej npr. število $14\,400$)?

Jože Grasselli