PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **26** (1998/1999)
Številka 5
Strani 294–301

Roman Drnovšek:

ERDÖS-MORDELLOVA NEENAKOST

Ključne besede: matematika, ravninska geometrija, trikotniki.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/26/1381-Drnovsek.pdf

ERDÖS–MORDELLOVA NEENAKOST

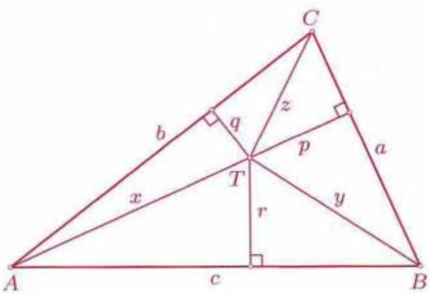
Leta 1996 preminuli Paul Erdös je bil izjemno plodovit matematik, saj je avtor okoli 1500 znanstvenih člankov. Ob njegovi smrti je več matematičnih revij pisalo o njem in njegovem delu. V slovenskem jeziku je v *Obzorniku za matematiko in fiziko*, letnik 44 (1997), številka 1, izšel krajši zapis prof. A. Suhadolca. Bolj podrobno je Erdös predstavljen v glasilu Ameriškega matematičnega društva *Notices of the American Mathematical Society*, letnik 45 (1998), številka 1.

V tem prispevku se bomo ukvarjali z neenakostjo v trikotniku, ki jo je Erdös odkril leta 1932, vendar je ni dokazal. Spoznali bomo tudi nekaj iz nje izpeljanih neenakosti.

1. Naj bo T poljubna točka v trikotniku ABC ali na njegovem robu. Z x, y in z zaporedoma označimo razdalje te točke do oglišč A, B in C, s p, q in r pa razdalje do (nosilk) stranic $a = BC$, $b = CA$ in $c = AB$ (glej sliko 1). Paul Erdös je domneval, da za te razdalje velja neenakost

$$x + y + z \geq 2\,(p + q + r)\,. \tag{1}$$

To domnevo je preskusil na precejšnjem številu trikotnikov, vendar je ni uspel dokazati. Nadalje je domneval, da v neenakosti velja enačaj le tedaj, ko je točka T središče enakostraničnega trikotnika ABC. Prvi dokaz neenakosti (1) je leta 1935 našel L. J. Mordell, zato se ta neenakost sedaj imenuje *Erdös-Mordellova neenakost*.



Slika 1.

Povzemimo dokaz te neenakosti po članku z naslovom *A short proof of the Erdös-Mordell theorem*, ki ga je v matematičnem mesečniku *American Mathematical Monthly* 104 (1997), str. 57–60, v spomin na Paula Erdösa napisal V. Komornik.

Dokažimo najprej, da velja neenakost

$$bq + cr \leq ax \tag{2}$$

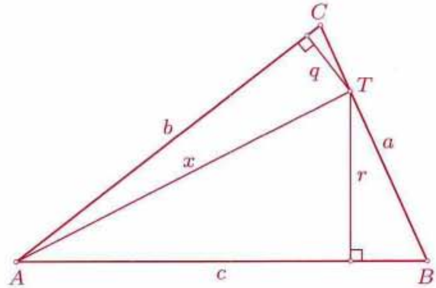
celo za poljubno točko T, ki leži znotraj kota $\sphericalangle BAC$ ali na njegovem robu. Iz dokaza bo razvidno, da velja enačaj v (2) natanko takrat, ko točka T

leži na nosilki višine na stranico a. Če točka T leži na stranici a (glej sliko 2), potem (2) sledi iz očitne ocene za ploščino trikotnika ABC

$$P_{ABC} \leq \frac{ax}{2}$$

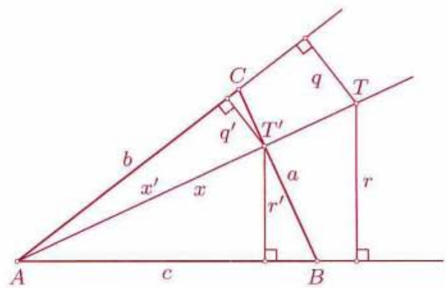
in zveze

$$P_{ABC} = P_{ATC} + P_{ABT} = \frac{bq}{2} + \frac{cr}{2}\,.$$



Slika 2.

Denimo sedaj, da je T poljubna točka znotraj kota $\sphericalangle BAC$ ali na njegovem robu. Naj bo T' presečišče premice skozi točki A in T s stranico BC. Z x', q' in r' zaporedoma označimo razdalje točke T' do oglišča A, stranice b in stranice c (glej sliko 3). Potem za točko T' velja neenakost (2), torej imamo $bq' + cr' \leq ax'$. Ker je zaradi podobnih trikotnikov $x' = kx$, $q' = kq$ in $r' = kr$ pri nekem $k > 0$, od tod sledi veljavnost neenakosti (2) tudi za točko T.



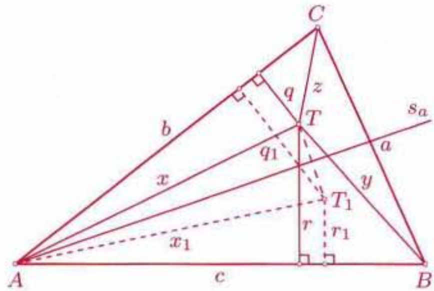
Slika 3.

Pri dokazu Erdös-Mordellove neenakosti lahko predpostavimo, da je kvečjemu eno od števil p, q in r enako 0. Če je namreč T eno izmed oglišč trikotnika ABC, denimo $T = C$, potem veljata neenakosti $a \geq r$ in $b \geq r$. Ker je vsaj ena izmed teh dveh neenakosti stroga, je $a + b > 2r$, torej v tem primeru velja (1).

Vzemimo najprej, da je trikotnik ABC enakostraničen. Tedaj je neenakost (1) enostavna posledica neenakosti (2). Res, zaradi $a = b = c$ je $x \geq q + r$. Analogno veljata še oceni $y \geq r + p$ in $z \geq p + q$, ki ju dobimo s ciklično permutacijo trojic x, y, z in p, q, r. Če te neenakosti seštejemo, dobimo neenakost (1). Prav tako je iz dokaza razvidno, da v neenakosti velja enačaj natanko tedaj, ko točka T leži na vseh višinah trikotnika, torej le tedaj, ko je T središče enakostraničnega trikotnika ABC.

Denimo sedaj, da trikotnik ABC ni enakostraničen. Prezrcalimo točko T preko simetrale s_α kota $\sphericalangle BAC$ in dobljeno točko označimo s T_1. Razdalje te točke do oglišča A, stranice b in stranice c zaznamujmo zaporedoma z x_1, q_1 in r_1 (glej sliko 4). Očitno je $x_1 = x$, $q_1 = r$ in $r_1 = q$. Ker točka T_1 leži znotraj kota $\sphericalangle BAC$ ali na njegovem robu, lahko zanjo uporabimo neenakost (2), ki nam da neenakost $ax \geq br + cq$. Po analogiji veljata še neenakosti

$$by \geq cp + ar \quad \text{in} \quad cz \geq aq + bp\,.$$



Slika 4.

Iz vseh treh neenakosti dobimo oceno

$$x + y + z \geq \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)p + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)q + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)r\,.$$

Iz neenakosti $(u-1)^2 \geq 0$, ki velja za poljubno realno število u, hitro sledi, da za $u > 0$ velja neenakost $u + 1/u \geq 2$, v kateri velja enačaj le pri $u = 1$. Torej so vsi trije izrazi v oklepajih večji oziroma kvečjemu enaki 2. Ker po predpostavki trikotnik ABC ni enakostraničen, sta vsaj dva izraza v oklepajih strogo večja od 2. Prav tako po predpostavki je kvečjemu eno od števil p, q in r enako 0. Zato velja stroga neenakost

$$x + y + z > 2p + 2q + 2r\,.$$

S tem je Erdös-Mordellova neenakost dokazana.

2. Če neenakost (2) pomnožimo s $\frac{p}{a}$, dobimo neenakost

$$px \geq \frac{b}{a}pq + \frac{c}{a}rp\,.$$

Analogno veljata neenakosti

$$qy \geq \frac{c}{b}qr + \frac{a}{b}pq$$

in

$$rz \geq \frac{a}{c}rp + \frac{b}{c}qr\,.$$

Če vse tri neenakosti seštejemo, dobimo

$$px + qy + rz \geq \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) pq + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) qr + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) rp\,.$$

Ker za poljubno pozitivno število u (tako kot prej) velja neenakost $u + 1/u \geq 2$, smo dokazali še neenakost

$$px + qy + rz \geq 2(pq + qr + rp)\,. \tag{3}$$

Z uporabo neenakosti med aritmetično in geometrijsko sredino dobimo iz (2) tudi oceno $ax \geq 2\sqrt{(bq)(cr)}$. Podobno veljata neenakosti $by \geq 2\sqrt{(cr)(ap)}$ in $cz \geq 2\sqrt{(ap)(bq)}$. Po množenju vseh treh neenakosti dobimo

$$xyz \geq 8pqr\,. \tag{4}$$

3. Naj bodo v_a, v_b in v_c zaporedoma višine na stranice a, b in c. Z R označimo polmer trikotniku ABC očrtane krožnice, z ρ pa polmer včrtane krožnice.

Ker očitno veljajo ocene $x + p \geq v_a$, $y + q \geq v_b$ in $z + r \geq v_c$, je

$$x + y + z + p + q + r \geq v_a + v_b + v_c\,.$$

Z uporabo neenakosti (1) od tod dobimo neenakost

$$\frac{x + y + z}{2} \geq \frac{v_a + v_b + v_c}{3}\,. \tag{5}$$

Ocenimo vsoto vseh višin navzdol! Po neenakosti med aritmetično in harmonično sredino je

$$\frac{v_a + v_b + v_c}{3} \geq \frac{3}{1/v_a + 1/v_b + 1/v_c}\,.$$

Ker velja

$$\frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c} = \frac{a}{a\,v_a} + \frac{b}{b\,v_b} + \frac{c}{c\,v_c} = \frac{a + b + c}{2P_{ABC}} = \frac{1}{\rho}\,,$$

dobimo tako neenakost

$$v_a + v_b + v_c \geq 9\rho$$

in z uporabo (5) še

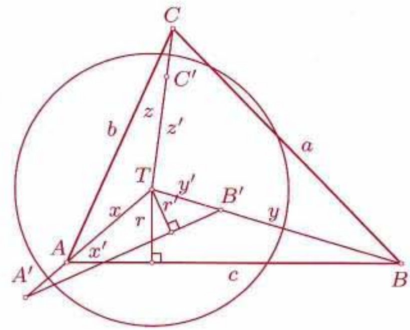
$$x + y + z \geq 6\rho\,.$$

V primeru, ko je točka T središče trikotniku ABC očrtane krožnice, torej velja

$$9\rho \leq v_a + v_b + v_c \leq \frac{9}{2}R\,,$$

kjer smo še enkrat uporabili (5). Od tod trivialno sledi znana neenakost $R \geq 2\rho$.

4. Predpostavimo, da je T poljubna točka v notranjosti trikotnika ABC. Preslikajmo poljubno točko S, ki ni enaka T, z inverzijo glede na krožnico s središčem v točki T in polmerom 1. Preslikana točka S' leži na poltraku, ki ima izhodišče v točki T in gre skozi točko S, za razdaljo do točke T pa velja $TS \cdot TS' = 1$. Z x', y' in z' zaporedoma označimo razdalje točke T do oglišč A', B' in C', s p', q' in r' pa razdalje do stranic $B'C'$, $C'A'$ in $A'B'$ (glej sliko 5). Po definiciji inverzije je



Slika 5.

$$x' = \frac{1}{x}\,, \quad y' = \frac{1}{y} \quad \text{in} \quad z' = \frac{1}{z}\,.$$

Ker zaradi $xx' = yy' = 1$ velja $y'/x' = x/y$ oz. $B'T/A'T = AT/BT$, sta si trikotnika ABT in $B'A'T$ podobna. Potemtakem velja $r/x = r'/y'$ oz. $r = r'xy$. Po analogiji torej veljajo enakosti

$$p' = \frac{p}{yz}\,, \quad q' = \frac{q}{zx} \quad \text{in} \quad r' = \frac{r}{xy}\,.$$

To pomeni, da velja naslednja trditev:

Če neka neenakost velja za razdalje x, y, z, p, q in r v poljubnem trikotniku ABC, potem velja tudi po substituciji

$$I : (x, y, z; p, q, r) \to \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}; \frac{p}{yz}, \frac{q}{zx}, \frac{r}{xy}\right).$$

Ko substitucijo I uporabimo na Erdös-Mordellovi neenakosti, dobimo neenakost

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 2\left(\frac{p}{yz}+\frac{q}{zx}+\frac{r}{xy}\right)$$

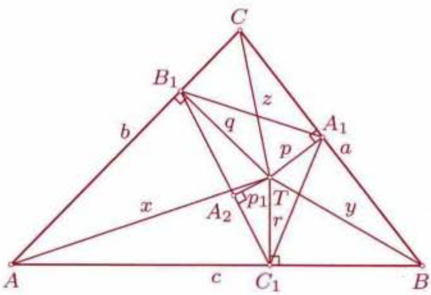
oziroma

$$xy+yz+zx \geq 2(px+qy+rz)\,. \tag{6}$$

Če združimo neenakosti (3) in (6), imamo še

$$xy+yz+zx \geq 4(pq+qr+rp)\,.$$

5. Tudi sedaj vzemimo, da točka T leži v notranjosti trikotnika ABC. Naj bodo A_1, B_1 in C_1 zaporedoma pravokotne projekcije točke T na stranice a, b in c. Z x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 in r_1 označimo zapovrstjo razdalje točke T do oglišč A_1, B_1 in C_1 ter stranic B_1C_1, C_1A_1 in A_1B_1 (glej sliko 6). Potem je $x_1 = p$, $y_1 = q$ in $z_1 = r$. Naj bo A_2 pravokotna projekcija točke T na stranico B_1C_1. Ker je štirikotnik AC_1TB_1 tetiven, sta kota $\sphericalangle B_1AT$ in $\sphericalangle B_1C_1T$ enaka, saj sta obodna kota nad isto tetivo B_1T. Od tod sledi, da sta si pravokotna trikotnika B_1AT in A_2C_1T podobna. Zato je $p_1 = qr/x$ in analogno še $q_1 = rp/y$ ter $r_1 = pq/z$. S tem smo dokazali naslednje:



Slika 6.

Če neka neenakost velja za razdalje x, y, z, p, q in r v poljubnem trikotniku ABC, potem velja tudi po substituciji oziroma transformaciji

$$V : (x,y,z;p,q,r) \to \left(p,q,r;\frac{qr}{x},\frac{rp}{y},\frac{pq}{z}\right)\,.$$

Če uporabimo substitucijo V na Erdös-Mordellovi neenakosti, dobimo novo neenakost

$$p+q+r \geq 2\left(\frac{qr}{x}+\frac{rp}{y}+\frac{pq}{z}\right)$$

oziroma

$$\frac{1}{pq}+\frac{1}{qr}+\frac{1}{rp}\geq 2\left(\frac{1}{px}+\frac{1}{qy}+\frac{1}{rz}\right).$$

Če substitucijo V izvedemo v neenakosti (6), izpeljemo neenakost

$$pq+qr+rp\geq 2\left(\frac{qrp}{x}+\frac{rpq}{y}+\frac{pqr}{z}\right)$$

oziroma

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\geq 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

Če na zadnji neenakosti naredimo substitucijo I, dobimo še neenakost

$$\frac{1}{px}+\frac{1}{qy}+\frac{1}{rz}\geq 2\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right).$$

Povzemimo! V poljubnem trikotniku ABC za razdalje x, y, z, p, q in r veljajo naslednje neenakosti

$$\begin{aligned}
x+y+z &\geq 2\,(p+q+r)\\
\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} &\geq 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\\
xy+yz+zx &\geq 2(px+qy+rz)\\
\frac{1}{px}+\frac{1}{qy}+\frac{1}{rz} &\geq 2\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)\\
px+qy+rz &\geq 2(pq+qr+rp)\\
\frac{1}{pq}+\frac{1}{qr}+\frac{1}{rp} &\geq 2\left(\frac{1}{px}+\frac{1}{qy}+\frac{1}{rz}\right)
\end{aligned}$$

Članek končajmo z naslednjo, nekoliko presenetljivo trditvijo:

Če iz trikotnika $A_1B_1C_1$ dobimo trikotnik $A_2B_2C_2$ na enak način, kot smo iz trikotnika ABC dobili trikotnik $A_1B_1C_1$, in če to ponovimo še enkrat, potem je zadnji trikotnik $A_3B_3C_3$ podoben prvotnemu trikotniku ABC.

Za dokaz te trditve izračunajmo, kaj dobimo, če trikrat zapovrstjo uporabimo transformacijo V. Ker je

$$V^2 : (x, y, z; p, q, r) \to \left(\frac{qr}{x}, \frac{rp}{y}, \frac{pq}{z}; \frac{pqr}{yz}, \frac{pqr}{zx}, \frac{pqr}{xy}\right),$$

je

$$V^3 : (x, y, z; p, q, r) \to \left(\frac{pqr}{yz}, \frac{pqr}{zx}, \frac{pqr}{xy}; \frac{p^2qr}{xyz}, \frac{pq^2r}{xyz}, \frac{pqr^2}{xyz}\right)$$

oziroma

$$V^3 : (x, y, z; p, q, r) \to (Kx, Ky, Kz; Kp, Kq, Kr),$$

kjer je

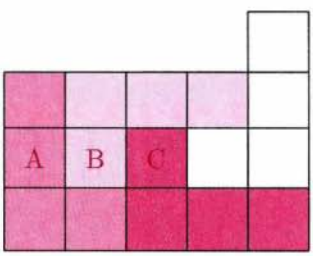
$$K = \frac{pqr}{xyz}.$$

Od tod sledi, da sta si trikotnika ABC in $A_3B_3C_3$ podobna s podobnostnim koeficientom K. Ker po (4) velja $K \leq 1/8$, so stranice trikotnika $A_3B_3C_3$ vsaj 8-krat manjše od stranic trikotnika ABC.

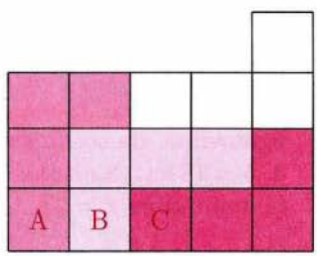
Roman Drnovšek

RAZREŽI NA SKLADNE DELE – Rešitev s str. 217

a)



b)



Dragoljub M. Milošević