PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **26** (1998/1999)
Številka 2
Strani 86–90

Ivan Vidav:

O PREMOČRTNEM IN KROŽNEM GIBANJU

Ključne besede: matematika, geometrija, fizika, gibanje, premica, krožnica, vijačnica.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/26/1367-Vidav.pdf

O PREMOČRTNEM IN KROŽNEM GIBANJU

Telo, ki se giblje premočrtno s konstantno hitrostjo, pride v enakih časih enako daleč. Isto velja za telo, ki enakomerno kroži po krogu: v enakih časih opiše enako dolge loke, enaki loki na krogu pa imajo enake tetive. Zato se telo tudi v tem primeru v enakih časih enako oddalji. Ali je še kak drug način gibanja s to lastnostjo?

Pa denimo, da se točkasto telo giblje v ravnini tako, da pride v enakih časih enako daleč. To pomeni: če je v času t_1 v točki T_1 in v času t_2 v T_2 in če je nadalje v času t_1' v točki T_1', v času t_2' pa v T_2', potem je razdalja $\overline{T_1'T_2'}$ enaka razdalji $\overline{T_1T_2}$, brž ko je razlika časov enaka, to se pravi, brž ko je $t_2' - t_1' = t_2 - t_1$.

Zaznamujmo s T_0 lego našega telesa v nekem začetnem času $t = 0$ in s $T(t)$ njegovo lego v poljubnem času t. Tu seveda privzamemo, da telo ne dela skokov. Zato je točka $T(t')$ tako blizu točke $T(t)$, kakor želimo, če je le časovna razlika $t' - t$ dovolj majhna.

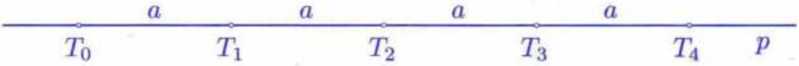
Telo pride čez nekaj časa v neko sosednjo točko $T_2 \neq T_0$ (primer, da telo miruje, seveda izključimo). Zaznamujemo ta čas z 2τ, tako da je $T_2 = T(2\tau)$. Pišimo

$$T(k\tau) = T_k\,, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

V času $t = k\tau$ se je potemtakem telo premaknilo iz točke T_0 v T_k. Dobimo zaporedje točk $T_0, T_1, T_2, \ldots$ Vse daljice $\overline{T_kT_{k+1}}$ so enako dolge, saj pride telo iz vsake točke T_k v naslednjo T_{k+1} v enakem času τ. Isto velja za daljice $\overline{T_kT_{k+2}}$, ki so tudi vse med seboj skladne (telo se premakne iz T_k v T_{k+2} v času 2τ), skladne so tudi daljice $\overline{T_kT_{k+3}}$ itd.

Ker je $T_2 \neq T_0$ in $\overline{T_0T_1} = \overline{T_1T_2}$, so T_0, T_1 in T_2 različne točke. Ležijo lahko vse tri na isti premici ali pa so oglišča trikotnika, ki je seveda v ravnini, v kateri se giblje telo. Oglejmo si obe možnosti:

(I) T_0, T_1, T_2 so na isti premici, ki jo imenujmo p (slika 1). Očitno je T_1 med T_0 in T_2. (Samo v tem primeru je namreč $\overline{T_0T_1} = \overline{T_1T_2}$.) Kje leži točka T_3? Če T_3 ne bi bila na premici p, bi bile točke T_1, T_2, T_3 oglišča pravega trikotnika. Stranice tega trikotnika so $\overline{T_1T_2} = \overline{T_0T_1} = a$, $\overline{T_2T_3} = \overline{T_0T_1} = a$ in $\overline{T_1T_3} = \overline{T_0T_2} = 2a$. Vsota stranic $\overline{T_1T_2}$ in $\overline{T_2T_3}$ je $a+a = 2a$, torej je enaka tretji stranici $\overline{T_1T_3} = 2a$. Toda v pravem trikotniku je vsota dveh stranic vselej večja od tretje stranice. Zato morajo biti oglišča T_1, T_2 in T_3 na isti premici. Torej leži tudi točka T_3 na premici p, in sicer na nasprotni strani točke T_2 kakor T_1.

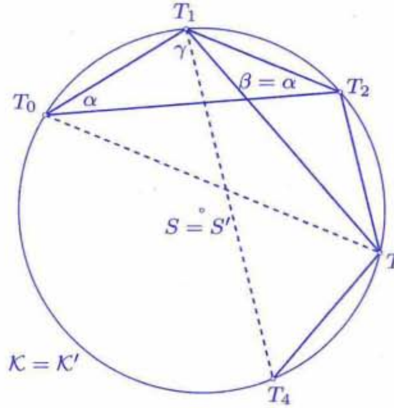


Slika 1.

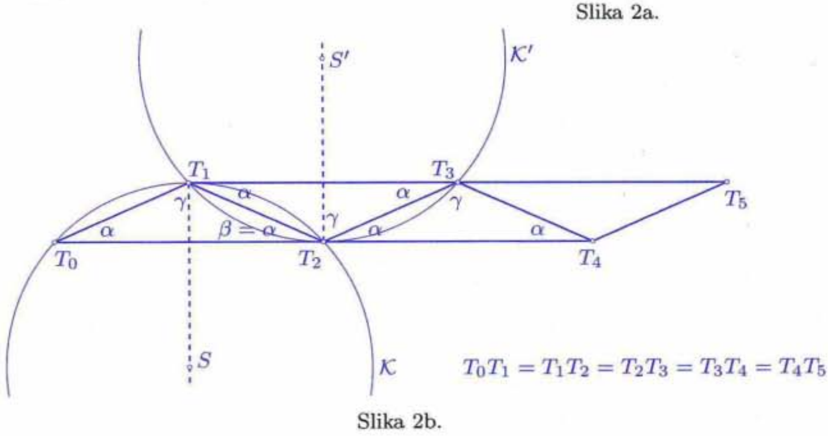
Če izhajamo iz trojke T_1, T_2, T_3 namesto iz trojke T_0, T_1, T_2, ugotovimo, da je tudi točka T_4 na premici p. Tako nadaljujemo in vidimo, da so v tem primeru vse točke T_k na premici p.

(II) T_0, T_1, T_2 so oglišča trikotnika, in sicer enakokrakega z vrhom v T_1, ker je $\overline{T_0T_1} = \overline{T_1T_2}$ (sliki 2a in 2b). Naj bodo njegovi koti α, β in γ. Kje leži v tem primeru točka T_3? Trikotnika $T_0T_1T_2$ in $T_1T_2T_3$ sta skladna (ujemata se v vseh stranicah: $\overline{T_0T_1} = \overline{T_1T_2}$, $\overline{T_1T_2} = \overline{T_2T_3}$ in $\overline{T_0T_2} = \overline{T_1T_3}$), zato imata pripadajoči očrtani krožnici $\mathcal{K}$ in $\mathcal{K}'$ enak polmer. Ker gresta obe krožnici skozi točki T_1 in T_2, imamo spet dve možnosti:

(IIa) Središči S in S' krožnic $\mathcal{K}$ in $\mathcal{K}'$ ležita na isti strani stranice T_1T_2. V tem primeru središči sovpadata in prav tako obe krožnici, torej $S' = S$ in $\mathcal{K} = \mathcal{K}'$. (Središče krožnice, ki je očrtana enakokrakemu trikotniku, leži na isti strani kraka kakor trikotnik. V našem primeru sta torej oba trikotnika $T_0T_1T_2$ in $T_1T_2T_3$ na isti strani stranice T_1T_2, kakor kaže slika 2a.) Ker se krožnici $\mathcal{K}$ in $\mathcal{K}'$ ujemata, ima štirikotnik $T_0T_1T_2T_3$ očrtano krožnico, namreč $\mathcal{K} = \mathcal{K}'$.



Slika 2a.



Slika 2b.

(IIb) Središči S in S' sta na nasprotnih straneh stranice T_1T_2. Isto velja v tem primeru za trikotnika $T_0T_1T_2$ in $T_1T_2T_3$, ki sta tudi na nasprotnih straneh imenovane stranice (slika 2b). Enakokraki trikotnik $T_1T_2T_3$ ima pri vrhu T_2 kot γ, pri T_1 in T_3 pa sta kota enaka $\alpha = \beta$. Zato je štirikotnik $T_0T_2T_3T_1$ paralelogram, nasprotne stranice so v njem vzporedne. Očrtane krožnice ta štirikotnik nima. Krožnici $\mathcal{K}$ in $\mathcal{K}'$ sta namreč tu različni.

Poiščimo zdaj točko T_4! Oglejmo si najprej primer (IIa). Ker sta štirikotnika $T_0T_1T_2T_3$ in $T_1T_2T_3T_4$ skladna (ujemata se v vseh stranicah in obeh diagonalah), premore tudi štirikotnik $T_1T_2T_3T_4$ očrtano krožnico. Ta krožnica pa je $\mathcal{K}$, saj gre $\mathcal{K}$ skozi oglišča T_1, T_2 in T_3 (slika 2a). To pa pomeni, da je tudi točka T_4 na krožnici $\mathcal{K}$. Če tako nadaljujemo, ugotovimo, da ležijo vse točke T_k v primeru (IIa) na krožnici $\mathcal{K}$.

V primeru (IIb) štirikotnik $T_1T_3T_4T_2$ nima očrtane krožnice, ker je skladni štirikotnik $T_0T_2T_3T_1$ nima. Zato ležita trikotnika $T_1T_2T_3$ in $T_2T_3T_4$ na nasprotnih straneh stranice T_2T_3 (slika 2b). Točke T_1, T_3, T_4 in T_2 so oglišča paralelograma in je zato stranica T_2T_4 vzporedna stranici T_1T_3. Ker je tudi stranica T_0T_2 vzporedna stranici T_1T_3, vidimo, da so v tem primeru točke T_0, T_2 in T_4 na isti premici.

Vzemimo zdaj zaporedje točk

$$T'_j = T(j \cdot \frac{\tau}{2}), \qquad j = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Telo pride iz točke T'_j v naslednjo točko T'_{j+1} pri vsakem j v času $\frac{\tau}{2}$. Novo zaporedje vsebuje prejšnje: pri $j = 2k$ je namreč $T'_{2k} = T(2k \cdot \frac{\tau}{2}) = T(k\tau) = T_k$. Glede lege točk T'_j imamo seveda tudi zdaj tri možnosti:

- (I) Vse točke T'_j so na isti premici. To velja potem tudi za točke $T'_{2k} = T_k$, tako da so vse točke T'_j na premici p. Za prvotno zaporedje nastopi torej primer (I).
- (IIa) Vse točke T'_j ležijo na krožnici, ki je očitno krožnica $\mathcal{K}$, na kateri so točke T_k. Torej imamo pri prvotnem zaporedju T_k prav tako primer (IIa).
- Če nastopi za zaporedje T'_j primer (IIb), so točke $T'_0 = T_0$, $T'_2 = T_1$ in $T'_4 = T_2$ na isti premici. To pa pomeni, da nastopi za zaporedje T_k primer (I). Ker smo izčrpali vse možnosti za zaporedje T'_j in se primer (IIb) za prvotno zaporedje pri tem ni pojavil, sklepamo, da primer (IIb) sploh ni mogoč. Tako smo dokazali, da so vse točke T_k prvotnega zaporedja bodisi na premici p bodisi na krožnici $\mathcal{K}$.

Izberimo poljubno naravno število $n \geq 1$ in postavimo

$$T(j \cdot \frac{\tau}{n}) = T_j^{(n)}, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$$

Za vsak n dobimo zaporedje točk $T_0^{(n)}, T_1^{(n)}, \ldots$ Kakor za zaporedje T_k dokažemo, da ležijo vse točke teh zaporedij bodisi na premici bodisi na krožnici. Ker je $T_{kn}^{(n)} = T(kn \cdot \frac{\tau}{n}) = T(k\tau) = T_k$, je prvotno zaporedje vsebovano v vsakem izmed naših zaporedij. Če so torej vse točke T_k na premici p, velja isto za vse točke $T_j^{(n)}$ pri poljubnem j in poljubnem n. Kadar pa ležijo točke T_k na krožnici $\mathcal{K}$, so tudi vse točke $T_j^{(n)}$ na $\mathcal{K}$.

Naj bo t poljuben čas in se vprašajmo, kje je telo ob času t, se pravi, kje leži točka $T(t)$. Denimo, da so vse točke zaporedja T_k na premici p. Izračunajmo kvocient t/τ. Če je racionalen, npr. enak ulomku j/n, je $t = j\tau/n$, točka $T(t) = T(j \cdot \frac{\tau}{n}) = T_j^{(n)}$ pa leži, kakor smo pravkar ugotovili, na premici p. Če kvocient t/τ ni racionalno število, izberimo ulomek j/n, ki se zelo malo razlikuje od tega kvocienta. Potem se $j\tau/n$ zelo malo razlikuje od t. Ker telo ne naredi nobenega skoka, je pripadajoča točka $T_j^{(n)}$ zelo blizu točke $T(t)$. Toda točka $T_j^{(n)}$ je na premici p. To pa pomeni, da so na premici p točke, ki so poljubno blizu točke $T(t)$. To je očitno mogoče le tedaj, kadar je tudi $T(t)$ na p. Torej za vsak t, naj bo kvocient t/τ racionalen ali iracionalen, leži $T(t)$ na premici p. Podobno se prepričamo, da so vse točke $T(t)$ na krožnici $\mathcal{K}$, kadar nastopi za zaporedje T_k primer (IIa) in so vse točke T_k na $\mathcal{K}$. Tako smo dokazali trditev

(A) Če se točkasto telo giblje v ravnini tako, da se v enakih časih enako oddalji, je njegov tir premica ali krožnica.

Torej točka ne more potovati po elipsi tako, da bi prišla v enakih časih vedno enako daleč.

— — —

Krožnica je ravninska krivulja, pri kateri imajo enako dolgi loki enako dolge tetive. Ali je še kaka druga krivulja s to lastnostjo?

Pa naj bo K ravninska krivulja (K ni premica), pri kateri pripadajo enakim lokom enake tetive. Če se točkasto telo giblje po tej krivulji s konstantno hitrostjo, opiše v enakih časih enako dolge loke, tem lokom pa pripadajo enako dolge tetive. Zato pride telo v enakih časih enako daleč. Po trditvi (A) je tir K krožnica. Torej:

(B) Krožnica je edina krivulja v ravnini, pri kateri imajo enako dolgi loki enako dolge tetive.

Trditev (A) – kot nalogo jo je postavil David White z Oklahoma State University v časopisu American Math. Monthly, (1997), Problem 10587 – sodi v diferencialno geometrijo in jo lahko dokažemo tudi z njenimi metodami. Vendar v diferencialni geometriji predpostavljamo, da ima točkasto telo v vsakem trenutku natanko določeno hitrost. V zgornjem dokazu nismo privzeli, da hitrost obstaja, temveč samo to, da telo nikoli ne napravi nobenega skoka.

Tu smo obravnavali gibanje v ravnini. Kako je v prostoru? Vijačnica je prostorska krivulja. Opiše jo točka, ki enakomerno kroži po krožnici, krožnica pa se s konstantno hitrostjo premika v smeri, pravokotni na ravnino krožnice. Ni težko dokazati, da pride telo, ki se giblje s konstantno hitrostjo po vijačnici, v enakih časih enako daleč. To pa je tudi edina prostorska krivulja s to lastnostjo. Velja namreč trditev, ki pa je tu ne bomo dokazovali:

(C) Če se točkasto telo giblje v trirazsežnem prostoru tako, da pride v enakih časih enako daleč, je njegov tir bodisi premica bodisi krožnica bodisi vijačnica.

Ivan Vidav

IZVOR BESEDE SINUS

Ste si kdaj zastavili vprašanje, zakaj se npr. logaritmu reče prav logaritem ali od kje izvira besedica *pi*?

Tokrat si oglejmo, kako je svoje ime dobila funkcija sinus.

Kaj je sinus danega ostrega kota, verjetno veste. To je razmerje med dolžino katete, ki leži v pravokotnem trikotniku nasproti danemu kotu, in dolžino hipotenuze.

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{a}{c}}$$