PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **19** (1991/1992)
Številka 6
Strani 334–338

Michael A. B. Deakin, prev. in prir. Darjo Felda:

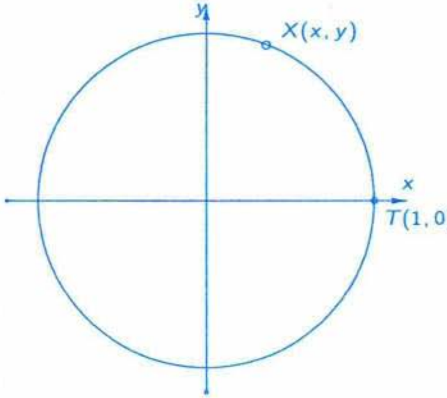
SUPERKROŽNICE

Ključne besede: matematika.

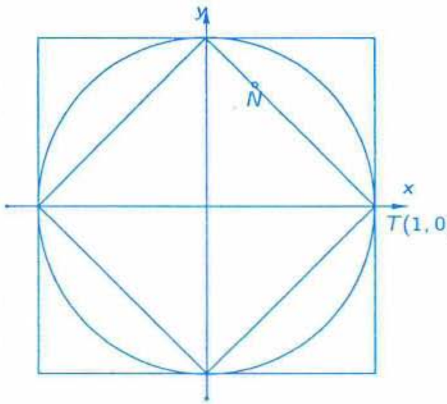
Elektronska verzija: http://www.presek.si/19/1101-Felda.pdf

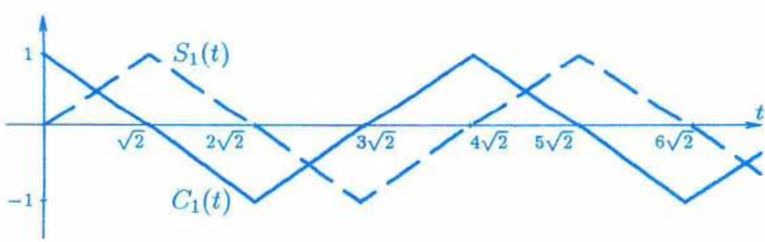
SUPERKROŽNICE

Koordinati poljubne točke na enotski krožnici, to je krožnici s polmerom 1 in središčem v koordinatnem izhodišču, zadoščata enačbi $x^2 + y^2 = 1$. Če je točka $X(x, y)$ presek te krožnice s poltrakom, ki oklepa kot t s pozitivno stranjo abscisne osi, velja $x = \cos t$ in $y = \sin t$. Odločimo se, da bomo kote merili v radianih. Potem je t razdalja, ki jo prehodimo, če gremo po krožnici v pozitivni smeri od točke $T(1, 0)$ do točke X.



Dopolnimo sliko z dvema kvadratoma in se napotimo iz točke T v pozitivni smeri po robu notranjega kvadrata. Poljubno točko N bomo podali s koordinatama $x = C_1(t)$ in $y = S_1(t)$, kjer t pomeni razdaljo, ki jo prehodimo, če gremo po tem kvadratu od točke T do točke N. Narišimo funkciji $C_1(t)$ in $S_1(t)$:





Poskusimo zapisati $C_1(t)$ v eksplicitni obliki. Najprej se omejimo na interval $[0, 4\sqrt{2}]$. Lomljeno črto dvignimo za 1 (lom bo torej v $(2\sqrt{2}, 0)$) in del, ki je levo od loma, preslikajmo preko abscisne osi. Dobimo daljico, ki leži na premici $y = \frac{t}{\sqrt{2}} - 2$. Za vsak $t \in [0, 4\sqrt{2}]$ je zato $C_1(t) = |\frac{t}{\sqrt{2}} - 2| - 1$. Očitno to ne velja za take t, ki niso na intervalu $[0, 4\sqrt{2}]$, saj dobimo vrednost 3, če vstavimo v formulo $t = 6\sqrt{2}$, $C_1(t)$ pa zavzame le vrednosti z intervala $[-1, 1]$, pa še periodična je. Če se namreč odločimo, da bomo korakali naokrog po notranjem kvadratu, bomo na vsakih $4\sqrt{2}$ prehojenih enot prišli v isto točko. Zato po majhnem premisleku nekoliko popravimo zgornji zapis za $C_1(t)$. Dobimo novega, ki velja pri vsakem t:

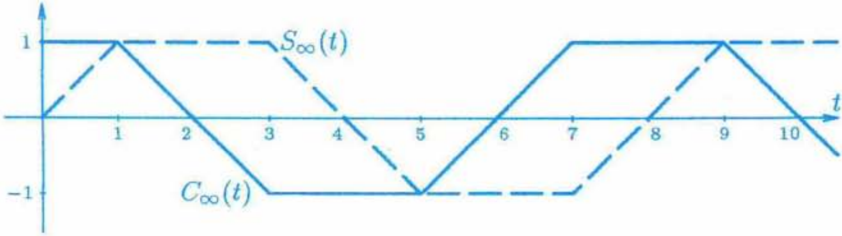
$$C_1(t) = |\frac{t}{\sqrt{2}} - 4\left[\frac{t}{4\sqrt{2}}\right] - 2| - 1$$

($[a]$ pomeni največje celo število, ki ni večje od a). Vsi, ki se radi sami prepričajo v pravilnost zapisa, bodo hitro preverili, ali velja tudi za negativne t. Če bi se namreč odločili za tek po kvadratu od točke T v smeri urinih kazalcev, bi (kot matematiki) razdalji za sabo dodali negativen predznak, graf funkcije $C_1(t)$ pa nadaljevali še na negativno stran.

S funkcijo $S_1(t)$ hitro opravimo. Bežen pogled na graf pove, da je le za $\sqrt{2}$ premaknjena od prejšnje funkcije, zato

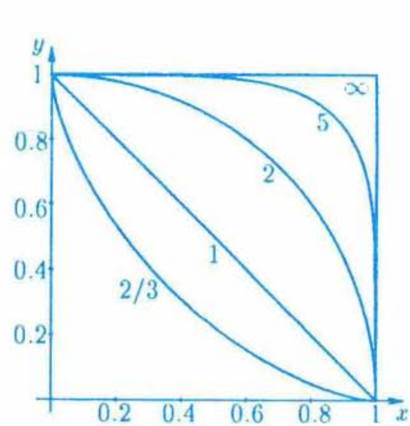
$$S_1(t) = |\frac{t - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} - 4\left[\frac{t - \sqrt{2}}{4\sqrt{2}}\right] - 2| - 1.$$

Pa se podajmo na pot iz točke $T(1, 0)$ še po zunanjem kvadratu. Naj bo tako kot prej t razdalja, ki jo prehodimo, da pridemo do točke s koordinatama x in y, z zapisoma $x = C_\infty(t)$ in $y = S_\infty(t)$ pa poudarimo, da sta koordinati odvisni od prehojene razdalje. Narišimo grafa:

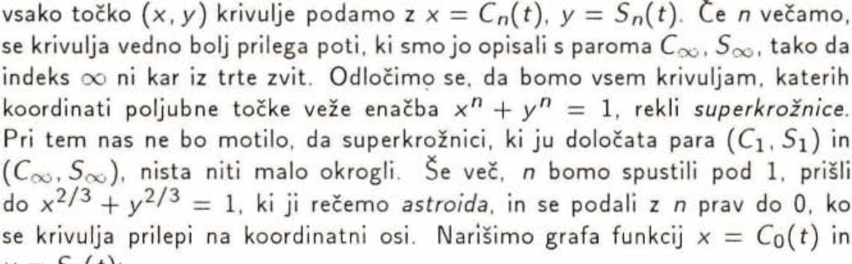


Bralcem pustimo, da poiščejo ekspliciten zapis funkcij C_∞ in S_∞. Vprašajmo se, zakaj smo uporabili indeks 1 oziroma ∞. Za začetek se omejimo na prvi kvadrant. To pomeni, da opazujemo par funkcij C_1, S_1 le za $0 \leq t \leq$

$\leq \sqrt{2}$ in par C_∞, S_∞ za $0 \leq t \leq 2$. Na sliki je narisanih pet krivulj z oznakami 2/3, 1, 2, 5 in ∞. Daljica, ki veže točki $(1,0)$ in $(0,1)$, leži na premici $x + y = 1$. Če to zapišemo v obliki $x^1 + y^1 = 1$, vidimo, da ima indeks 1 svoj pomen pri opisu te poti. Krivulja z oznako 2 je enotska krožnica $x^2 + y^2 = 1$, zato lahko pišemo $C_2(t) = \cos t$ in $S_2(t) = \sin t$. Oznako 5 nosi krivulja $x^5 + y^5 = 1$, ki je le ena od mnogih v družini krivulj $x^n + y^n = 1$. Pri vsakem n lahko krivuljo opišemo s parom funkcij (C_n, S_n):



vsako točko (x, y) krivulje podamo z $x = C_n(t)$, $y = S_n(t)$. Če n večamo, se krivulja vedno bolj prilega poti, ki smo jo opisali s paroma C_∞, S_∞, tako da indeks ∞ ni kar iz trte zvit. Odločimo se, da bomo vsem krivuljam, katerih koordinati poljubne točke veže enačba $x^n + y^n = 1$, rekli *superkrožnice*. Pri tem nas ne bo motilo, da superkrožnici, ki ju določata para (C_1, S_1) in (C_∞, S_∞), nista niti malo okrogli. Še več, n bomo spustili pod 1, prišli do $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, ki ji rečemo *astroida*, in se podali z n prav do 0, ko se krivulja prilepi na koordinatni osi. Narišimo grafa funkcij $x = C_0(t)$ in $y = S_0(t)$:



Ko hočemo zapustiti prvi kvadrant, se pojavijo težave, vendar se jih znebimo, če na pomoč pokličemo *absolutno vrednost*. Tako je na primer absolutna vrednost števila a, kar označimo z $|a|$, razdalja med številom a in številom 0 na številski premici, ta pa je zmeraj pozitivna. Če smo z $x^1 + y^1 = 1$ podali daljico, ki je povezovala točki $(1,0)$ in $(0,1)$, potem z

$|x|^1 + |y|^1 = 1$ predstavimo kvadrat z oglišči $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ in $(0,-1)$. V splošnem bomo torej superkrožnico podali z

$$|x|^n + |y|^n = 1.$$

Pri nekaterih n so sicer oznake za absolutno vrednost odveč (na primer pri $n = 2$), vendar pa ni zmeraj tako. Pomislite, kaj bi se zgodilo, če pri $n = 1$, 3 ali $1/2$ ne bi imeli absolutne vrednosti.

V tem sestavku je problem predstavljen le v grobem. To je bila ena od tem na *Raziskovalnih dnevih iz matematike za srednješolce*, ki jih je *Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije* organiziralo septembra 1991. Vsebina je povzeta iz revije *Function*, ki jo za srednješolce iz Avstralije izdajajo na *Monash University* v državi *Victoria*.

Seveda ostajajo odprta še mnoga vprašanja; zapišimo jih le pet:

1. Funkciji C_n, S_n zadoščata nekim lastnostim trigonometričnih funkcij, na primer

$$C_n(0) = 1,\ S_n(0) = 0$$
$$C_n(-t) = C_n(t),\ S_n(-t) = -S_n(t)$$
$$C_n^n(t) + S_n^n(t) = 1$$

Kaj pa druge lastnosti?

2. Enačbo $|x|^n + |y|^n = 1$ smo obdelali le za $n \geq 0$. Kaj se zgodi, če izberemo $n < 0$?

3. Kako si razlagamo enakosti $|x|^0 + |y|^0 = 1$ in $|x|^\infty + |y|^\infty = 1$, ki ju dobimo kot skrajna primera?

4. Če s T_n označimo periodo funkcij C_n in S_n, je ta seveda enaka obsegu ustrezne superkrožnice. Najmanjši obseg ima $|x|^1 + |y|^1 = 1$, saj je $T_1 = 4\sqrt{2}$, največja obsega pa dobimo pri $n = 0$ in $n = \infty$, ko je $T_0 = T_\infty = 8$. Na sliki imamo T_n kot funkcijo indeksa n. O podrobnostih pa ne vemo še nič določnega.