// PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **19** (1991/1992)
Številka 5
Strani 262–266

Ivan Vidav:

RAVNINSKE MNOŽICE, V KATERIH SE IZRAŽAJO RAZDALJE MED TOČKAMI S CELIMI ŠTEVILI

Ključne besede: matematika, osnove matematike, ravninske množice.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/19/1097-Vidav.pdf

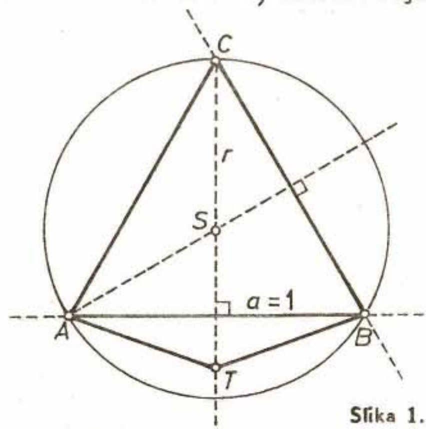
RAVNINSKE MNOŽICE, V KATERIH SE IZRAŽAJO RAZDALJE MED TOČKAMI S CELIMI ŠTEVILI

Naj bodo A, B, C oglišča enakostraničnega trikotnika s stranico $a = 1$. Zastavimo si tole vprašanje: Ali obstaja v ravnini tega trikotnika taka točka T, da se izražajo vse tri razdalje od oglišč $\overline{AT}, \overline{BT}$ in $\overline{CT}$ s celimi števili? Očitno ustrezajo temu pogoju oglišča, saj je npr. razdalja točke C od C enaka nič, od oglišč A in B pa 1. Je morda še kakšna druga taka točka?

Denimo, da so razdalje $\overline{AT}, \overline{BT}$ in $\overline{CT}$ cela števila. Oglejmo si trikotnik ABT. Po trikotniški neenačbi je razlika stranic $\overline{AT}$ in $\overline{BT}$ manjša ali enaka tretji stranici $\overline{AB}$, torej

$$|\overline{AT} - \overline{BT}| \leq \overline{AB}.$$

(Na levi strani smo zapisali absolutno vrednost $|\overline{AT} - \overline{BT}|$ zato, ker le-ta pomeni razliko med večjo in manjšo izmed stranic $\overline{AT}$ in $\overline{BT}$.) Enakost velja tu le tedaj, kadar je trikotnik ABT izrojen, se pravi, kadar leže točke A, B in T na isti premici. Ker je razlika $\overline{AT} - \overline{BT}$ v našem primeru celo število in $\overline{AB} = a = 1$, imamo samo dve možnosti: ali je $|\overline{AT} - \overline{BT}| = 0$ ali pa $|\overline{AT} - \overline{BT}| = 1$. V prvem primeru velja $\overline{AT} = \overline{BT}$ in je trikotnik ABT enakokrak z vrhom T. Točka T leži na simetrali stranice AB (slika 1). V drugem primeru so točke A, B in T kolinearne, torej je T na premici, ki veže A in B. To zveznico bomo na kratko zaznamovali z AB.



Slika 1.

Ker sta tudi razdalji $\overline{BT}$ in $\overline{CT}$ celi števili, ugotovimo kakor prej, da leži točka T bodisi na simetrali stranice BC bodisi na premici, ki veže B in C.

Točko T moramo potemtakem iskati med presečišči naslednjih štirih parov premic:

- simetral stranic AB in BC,
- simetrale stranice AB in premice BC,
- premice AB in simetrale stranice BC,
- premic AB in BC.

Presečišče simetral je središče očrtanega kroga (slika 1). V enakostraničnem trikotniku je polmer tega kroga $r = \frac{a}{3}\sqrt{3}$, v našem primeru torej $r = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Oddaljenost središča od oglišč A, B, C je enaka r. Ker r ni celo število, središče očrtanega kroga ne zadošča našemu pogoju. Presečišča nadaljnjih treh parov premic so po vrsti oglišča C, A in B. Te točke pa izpolnjujejo naš pogoj.

Tako smo ugotovili, da v ravnini enakostraničnega trikotnika s stranico 1 razen oglišč ni nobene druge točke T, za katero bi bile vse tri razdalje od oglišč cela števila.

Kaj pa, če vzamemo namesto enakostraničnega triktonika s stranico $a = 1$ trikotnik s poljubnimi stranicami in postavimo isto vprašanje? Odgovor na to vprašanje daje

IZREK 1. **Naj bo ABC poljuben trikotnik. Množica $\mathcal{M}$ tistih točk T, ki leže v ravnini tega trikotnika, razdalje od oglišč $\overline{AT}$, $\overline{BT}$ in $\overline{CT}$ pa so cela števila, je končna ali celo prazna.**

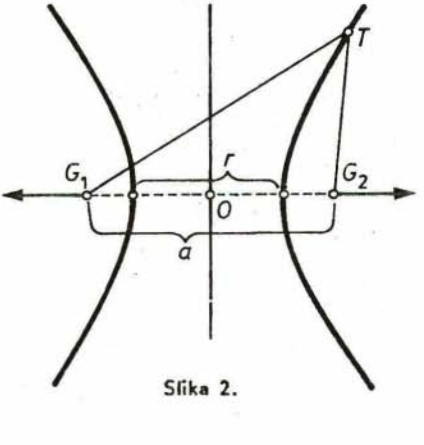
Pripomba. Tukaj je mišljeno, da je ABC pravi trikotnik, to je, točke A, B in C niso na isti premici. Za izrojeni trikotnik izrek ne velja. Denimo namreč, da so A, B, C na isti premici, da leži točka B med A in C, razdalji $\overline{AB}$ in $\overline{BC}$ pa sta enaki 1. Če je T taka točka na tej premici, da je njena razdalja od A celo število, sta tudi razdalji $\overline{BT}$ in $\overline{CT}$ celi števili. Takih točk pa je na premici AB očitno nešteto.

Pri dokazovanju izreka bomo uporabili tale dejstva o hiperbolah:

1. Naj bosta G_1 in G_2 točki v ravnini, $\overline{G_1G_2} = a$, nadalje naj bo r dano število, pri čemer je $0 \leq r \leq a$. Oglejmo si množico točk T v ravnini, za katere velja

$$|\overline{G_1T} - \overline{G_2T}| = r. \qquad (1)$$

Če je $0 < r < a$, je ta množica hiperbola, G_1 in G_2 pa sta njeni gorišči (slika 2). Ena izmed definicij hiperbole je namreč tale: hiperbola sestoji iz vseh točk T v ravnini, za katere je razlika razdalj od gorišč G_1 in G_2 konstanta. (Podobno je elipsa množica točk T v ravnini, za katere je vsota razdalj od gorišč konstanta.



Slika 2.

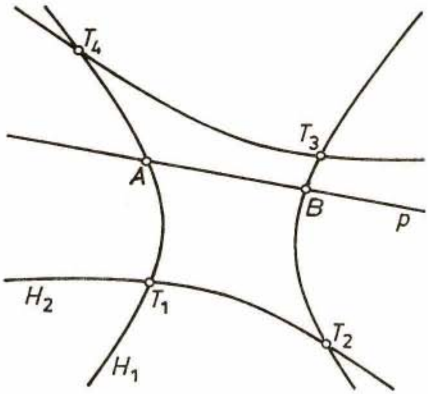
Od tod vrtnarska konstrukcija elipse.) Hiperbola ima dve veji. Za točke T na eni veji je $\overline{G_1T} - \overline{G_2T} = r$, na drugi $\overline{G_2T} - \overline{G_1T} = r$.

Če je $r = 0$, dobimo iz (1), da je $\overline{G_1T} = \overline{G_2T}$. V tem primeru leži T na simetrali daljice G_1G_2 in vsaka točka na simetrali zadošča temu pogoju. Zato je naša množica simetrala daljice G_1G_2. Kadar je $r = a$, so točke G_1, G_2, T na isti premici, ker velja $| \overline{G_1T} - \overline{G_2T} | = a = \overline{G_1G_2}$. Zdaj sestoji množica iz točk na premici G_1G_2. (Natančneje povedano: te točke sestavljajo dva poltraka premice G_1G_2: poltrak z vrhom G_1, na katerem ne leži G_2, in poltrak z vrhom G_2, na katerem ne leži G_1 (slika 2).) Simetrala daljice G_1G_2 in omenjena poltraka se včasih imenujeta **izrojeni hiperboli** z goriščema G_1 in G_2.

2. Premica seče hiperbolo največ v dveh točkah. Dve različni hiperboli pa imata kvečjemu štiri skupne točke (slika 3). Dokažimo zdaj izrek. Zaradi enostavnosti privzemimo, da so stranice našega trikotnika $\overline{AB} = c, \overline{BC} = a, \overline{AC} = b$ cela števila.

Naj bo T taka točka v ravnini trikotnika, da so razdalje $\overline{AT}, \overline{BT}, \overline{CT}$ cela števila. Po trikotniški neenačbi je

$$| \overline{AT} - \overline{BT} | \leq \overline{AB} = c. \qquad (2)$$



Slika 3.

Ker je tudi razlika $\overline{AT} - \overline{BT}$ celo število, ta neenačba pove, da je $| \overline{AT} - \overline{BT} |$ eno izmed števil 0, 1, ..., c. Množica točk T v ravnini, ki zadoščajo pogoju $| \overline{AT} - \overline{BT} | = r, r = 0, 1, \ldots, c$, pa je hiperbola z goriščema v točkah A in B. Imenujmo to hiperbolo H_r. Torej naša točka T leži na eni izmed hiperbol

$$H_0, H_1, \ldots, H_{c-1}, H_c \qquad (3)$$

(H_0 in H_c sta izrojeni hiperboli: H_0 je simetrala daljice AB, H_c pa sestoji iz dveh poltrakov na premici AB.)

Ker sta prav tako razdalji $\overline{BT}$ in $\overline{CT}$ celi števili, ugotovimo kakor zgoraj, da mora ležati točka T tudi na eni izmed hiperbol

$$H'_0, H'_1, \ldots, H'_{a-1}, H'_a. \qquad (3^*)$$

Hiperbola H'_s je množica točk T v ravnini, ki zadoščajo pogoju $| \overline{BT} - \overline{CT} | = s$. Vse hiperbole (3*) imajo gorišča v točkah B in C. Posebej je H'_0 simetrala stranice BC, H'_a pa sestoji iz dveh poltrakov na premici BC.

Hiperbole (3) so različne od hiperbol (3*). Prve imajo namreč gorišči A in B, druge pa B in C.

Vsaka točka T naše množice $\mathcal{M}$ leži torej na eni izmed hiperbol sistema (3) in hkrati na eni izmed hiperbol sistema (3*). Zato je $\mathcal{M}$ vsebovana v množici presečišč hiperbol (3) s hiperbolami (3*). Zgoraj smo povedali, da se dve hiperboli sečeta kvečjemu v štirih točkah, premica in hiperbola pa največ v dveh točkah. Torej je množica presečišč hiperbol (3) s hiperbolami (3*) končna. Enako velja potem za množico $\mathcal{M}$. S tem je izrek dokazan.

Ni rečeno, da je vsako presečišče hiperbol v množici $\mathcal{M}$. Na primer H_0 in H'_0 sta simetrali stranic AB in BC. Presečišče je središče trikotniku ABC očrtanega kroga. Središče očrtanega kroga pripada množici $\mathcal{M}$ samo tedaj, kadar je polmer tega kroga celo število.

Na premici obstaja neskončna množica točk s to lastnostjo, da je razdalja dveh poljubnih njenih točk celo število. Naj bo npr. T_n točka na številski premici, ki je slika celega števila n. Množica $\{T_n, n \in \mathbb{Z}\}$ je neskončna, razdalja med poljubnima njenima točkama T_m in T_n pa je celo število $| m - n |$. Na ravnini bi zaman iskali nekolinearno neskončno množico s to lastnostjo. Velja namreč

IZREK 2 (Anning - Erdös). **Naj bo $\mathcal{M}$ ravninska množica točk, v kateri je razdalja dveh poljubnih točk celo število. Če ne leže vse točke iz $\mathcal{M}$ na isti premici, je $\mathcal{M}$ končna množica.**

Izrek 2 je preprosta posledica izreka 1. Naj bo $\mathcal{M}$ taka ravninska množica, da ne leže vse njene točke na isti premici. Potem lahko najdemo v $\mathcal{M}$ tri točke A, B, C, ki so oglišča pravega trikotnika. Če je razdalja poljubnih dveh točk iz $\mathcal{M}$ celo število, so tudi razdalje $\overline{AT}, \overline{BT}, \overline{CT}$ cela števila za vsako točko $T \in \mathcal{M}$. Po izreku 1 pa je v ravnini samo končno mnogo takih točk T, da so razdalje $\overline{AT}, \overline{BT}, \overline{CT}$ cela števila. Torej je tudi množica $\mathcal{M}$ končna in izrek je dokazan.

Naj bo n poljubno dano naravno število. Oglejmo si v ravnini, ki je opremeljena s pravokotnim koordinatnim sistemom, tele točke

$$A = (0, 2^{n+1}), B = (0, -2^{n+1}), C_j = (2^j - 2^{2n-j}, 0), j = 0, 1, \dots, 2n.$$

Točke C_j leže na abscisni osi, njihove abscise so cela števila. Zato je razdalja