PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **19** (1991/1992)
Številka 4
Strani 214–218

Mirko Dobovišek:

BRSTENJE

Ključne besede: razvedrilo, naloge.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/19/1094-Dobovisek.pdf

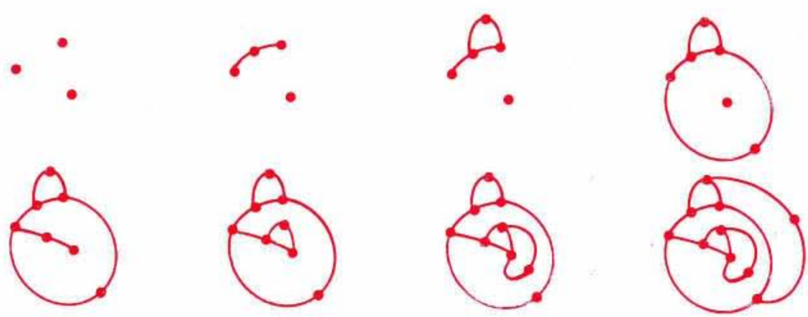
BRSTENJE

V sestavku bomo povedali nekaj o zanimivi igri imenovani "Sprouts", po slovensko "Brstenje". Premišljevali bomo tudi o tem, kako bi igro spremenili in tako "izumili" novo igro.

Igro sta po pripovedovanju odkrila John Horton Conway, profesor matematike na Sidney Sussex College, Cambridge in takratni študent Michael Steward Paterson leta 1967. Igro igramo na papirju z n pikami tako, da vlečemo poteze. Potezo potegnemo tako, da narišemo krivuljo od ene pike do druge ali pa nazaj do iste pike in nato nekje na tej krivulji naredimo novo piko. Pri tem moramo upoštevati naslednji pravili:

i) Povezava ima lahko kakršnokoli obliko, ne sme pa sekati same sebe, prej potegnjenih povezav in ne sme iti skozi nobeno prej narisanih pik.
ii) V nobeni piki se ne smejo začeti in končati več kot tri povezave. Rekli bomo, da ima vsaka pika tri življenja.

Igralca igrata tako, da izmenoma vlečeta poteze. Zmagovalec je tisti, ki lahko zadnji povleče potezo. Na naslednji sliki je prikazana tipična igra s tremi začetnimi pikami.



Slika 1

Igra se vedno konča, kar lahko dokažemo takole: Na začetku imamo n pik. Dogovorili smo se že, da bomo možne začetke potez imenovali življenja. Na začetku je torej $3n$ življenj. Pri vsaki potezi uničimo dve življenji in dodamo eno novo (novi piki na povezavi ostane eno življenje). Na vsakem koraku se torej število življenj zmanjša za 1. Po $3n-1$ potezah imamo samo še eno življenje in nove poteze ne moremo več potegniti. Ni težko pokazati, da potrebujemo vsaj $2n$ potez, da bi igro končali. Bralec, ki se bo pregrizel do konca sestavka, bo to gotovo znal sam dokazati.

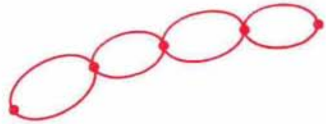
Igre ne bomo podrobno analizirali. Napišimo le nekaj besed:

Pri igri z eno začetno piko ni težav. Prvi igralec ima na razpolago le eno potezo. Piko poveže samo s seboj. Drugi igralec seveda zmaga. Poveže novo piko z začetno. To lahko naredi na dva načina: znotraj zanke ali zunaj nje. Če malo premislimo, vidimo, da sta ti dve potezi na neki način enakovredni.

Pri igri z dvema pikama lahko drugi igralec igra tako, da zmaga. Potez je tu še tako malo, da lahko vse možne igre narišemo in to preverimo. Dokazali so že tudi, da igre s tremi, štirimi in petimi začetnimi pikami lahko dobi prvi igralec, če seveda pravilno igra. Dokaz, da v igri s šestimi začetnimi pikami lahko vedno zmaga drugi igralec, je dolg kar 49 strani. Za razumevanje dokaza je potrebno že zelo veliko znanja. Sploh so se matematiki dosti ukvarjali s to igro, saj je zanimiva tudi zato, ker povezuje topologijo in kombinatoriko.

Kako pa bi igro lahko spremenili? Lahko jo recimo igramo na sferi. Igra ostane enaka, saj sfero, ki smo ji odvzeli katerokoli točko, lahko tako preslikamo na ravnino, da vsaki točki na sferi brez ene točke pripada točka na ravnini in obratno. Pri tem pa se nobena krivulja ne pretrga ali dodatno zavozla.

Igra na torusu (recimo avtomobilski zračnici) je že malo drugačna. Lahko pa igramo tudi na vazi z več ročaji. Možnosti je veliko. Vsaka pa zahteva svojo "analizo" igre.



Slika 2

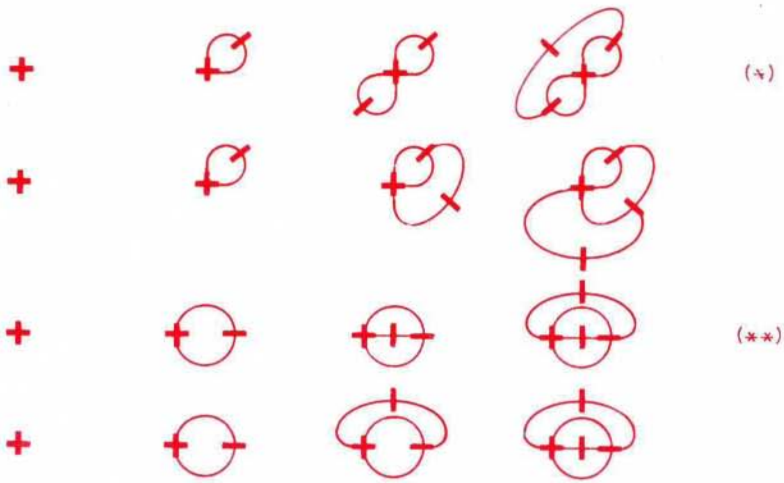
Kaj pa, če ima pika namesto treh življenj štiri življenja? Na zgornjem primeru vidimo, da potem igro lahko igramo tako, da se nikoli ne konča.

Kaj pa, če začnemo s križci namesto s pikami? Tako ima vsaka pika štiri življenja, vendar nam križci določajo smer, v katero smemo začeti vleči naslednje poteze. Nekatera življenja postanejo "ograjena" s prejšnjimi potezami. Ali se igra konča ali ne? Enak razmislek kot prej ne bo dober, kajti z vsako potezo uničimo dve življenji in dodamo novi dve. Število življenj je torej vseskozi enako. Dokaz, da se igra konča, je daljši: Število križcev označimo s T, del krivulje med dvema križcema imenujmo povezava, število povezav pa označimo s P. Območje naj bo del ravnine, ki je ograjen s povezavami in ne vsebuje nobenega križca. Število območij označimo z O.

Na začetku imamo torej n križcev, nobene povezave in, če je $n >$

> 1, nobenega območja. Pri $n = 1$ si lahko mislimo, da je ravnina brez križca območje (neomejeno). Z vsako potezo dobimo novo točko (tisto na potegnjeni krivulji) in dve novi povezavi.

Da bomo te pojme lažje razumeli, si oglejmo igro z enim začetnim križcem. Igra se konča v 3 korakih. Narišimo nekaj možnosti:



Slika 3

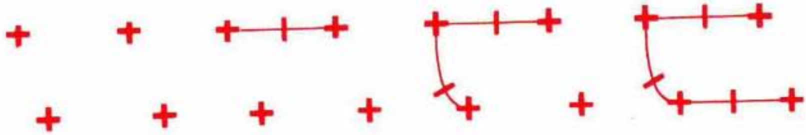
Drugih različnih načinov igranja ni, če upoštevamo vse simetrije. Kaj se je torej dogajalo v teh primerih? V začetku imamo eno območje (tisto neomejeno) in en križec. V vseh primerih imamo po prvi potezi dva križca, dve povezavi in dve območji (eno omejeno in eno neomejeno). Po drugem koraku imamo tri križce, tri območja in štiri povezave. Po četrtem koraku pa so štirje križci, šest povezav in štiri območja. Eno območje je seveda vedno neomejeno.

Vsako območje ima nekaj "rok", na katerih lahko začnemo ali končamo potezo. Če je teh prostih rok r, bomo rekli, da ima območje r *življenj*.

Oglejmo si še enkrat primer (*). V začetku je eno območje (neomejeno) s 4 življenji. Po prvi potezi imamo dve območji. Eno ima eno življenje, drugo pa tri. Po drugi potezi imamo tri območja: dve z enim življenjem in eno z dvema. Ko se igra konča, ima vsako območje le eno življenje. V nekaterih drugih primerih igranja igre z enim začetnim križcem, je število življenj v območjih drugačno kot prej (recimo v **).

Če začnemo z več križci, se število območij ne spreminja tako "pravilno", vsaj na začetku ne. Lahko se zgodi, da še po nekaj potezah ni nobenega območja.

Oglejmo si, kako lahko začnemo igro s štirimi začetnimi križci:



Slika 4

Igra se konča, ko ima vsako območje le po eno življenje. Pa se igra sploh konča? Ali mogoče lahko igramo tako, da ne bo konca?

To, da se igra vedno konča, bomo dokazali z matematično indukcijo. Videli smo že, da se igra z enim začetnim križcem konča. Predpostavimo torej, da se končajo vse igre z manj kot n križci. S pomočjo te predpostavke bomo dokazali, da se konča tudi igra z n začetnimi križci.

Dokažimo najprej, da bo prej ali slej vseh n začetnih križcev med seboj povezanih. Sploh bodo potem povezani vsi križci, saj nove vedno narišemo na povezavah.

Recimo, da temu ni tako. Potem lahko igramo tako, da do enega križca nikoli ne potegnemo poteze oziroma povezave. To pa je tako, kot da bi igrali igro z enim začetnim križcem manj. Taka igra se po predpostavki konča. Ko se ta igra, z enim križcem manj, konča, lahko potegnemo še potezo od osamljenega križca do življenja v območju, kjer ta križec je. Od te poteze naprej, pa so vsi križci povezani. Tako smo prišli do protislovja s predpostavko, da lahko tako igramo, da ne bodo nikoli vsi križci povezani. Ravnina je razpadla na sama območja. Teh območij je seveda končno. Če nam uspe dokazati, da lahko v vsakem območju potegnemo le še končno potez, bomo dokazali, da se igra konča v končno mnogo korakih.

Koliko potez lahko potegnemo v območju s s življenji? Razmislimo takole: V območju z enim življenjem ne moremo potegniti nobene poteze. V območju z dvema življenjema, lahko naredimo eno potezo. Dobimo dve območji, vsako z enim življenjem. Zato je konec igre v tem območju. Če ima območje tri življenja, povežemo dve med seboj. Dobimo dve območji, eno z enim življenjem in eno z dvema. V drugem območju je, kot že vemo, možna ena poteza. Skupaj smo potegnili torej dve potezi.

Z indukcijo pokažimo, da lahko v območju s s življenji potegnemo natanko $s-1$ potez. Za $s=1$ smo to že videli. S prvo potezo iz ob-