ORNAMENTI NA TRAKU

Kdo še ni občudoval lepih ornamentov na blagu, preprogah, tapetah, freskah? Kdo ne pozna čudovitih ornamentov starih Egipčanov, Inkov, Grkov, Kitajcev, s katerimi so okrasili razne uporabne in okrasne predmete, grobnice, svetišča (slika 1 na IV. strani ovitka)? Največje mojstrstvo v ustvarjanju ornamentov pa so nedvomno dosegli arabski umetniki. Ker jim vera prepoveduje upodabljati boga in dogodke iz življenja, so "božansko neskončnost" izražali z abstraktnimi ornamenti v obliki prepletajočih se stiliziranih listov trte, ki jim pravimo *arabeske* (slika 2). Čistost linij še poudarijo skopo in skrbno izbrane barve. Največ je modre barve, ki simbolizira neskončnost, in zlate, s katero slavijo Alahovo ime. Človeku zastaja dih, ko občuduje umetniško ubranost mošeje Doma svete skale v Jeruzalemu, Modre mošeje v Carigradu ali dvorca Alhambre v Granadi (slika 3 na naslovni strani).

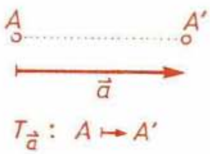
Pri opazovanju ornamentov le malokdo pomisli, da njihova lepota temelji na preprostih matematičnih zakonih. Ornament pritegne našo pozornost zaradi ponavljanja in notranje urejenosti. Da bomo to "urejenost" pojasnili, se bomo oprli na pojem *izometrije.*[1]

Začnimo z definicijo, da je *izometrija ravnine* taka preslikava v ravnini, ki ohranja medsebojne razdalje: poljuben par točk A in B preslika v taki točki A' in B', da sta daljici AB in A'B' enako dolgi. Bralec lahko sam dokaže, da je izometrija povratno enolična preslikava ter da preslika premico v premico in trikotnik v skladen trikotnik. Primeri se lahko, da se preslikana točka pokrije s prvotno. Tako točko imenujemo *negibno točko*. Če je negibnih točk več, ležijo vse ali na premici ali pa so sploh vse točke negibne. Tudi to trditev naj poskusi dokazati bralec sam, mi pa naštejmo *osnovne tipe izometrij*:

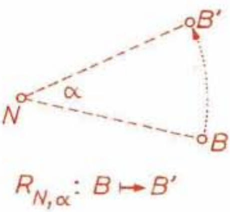
Slika 2. Arabeska

[1] Izometrijam pravimo tudi (*toga*) *gibanja*, a ker se ta izraz uporablja v številnih drugih zvezah, bomo raje ostali pri izometriji.

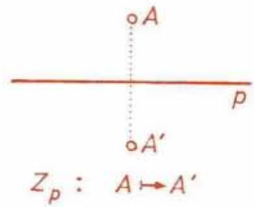
- *Identititeta* je izometrija, ki ohranja vse točke. Označujemo jo z I.
- *Vzporedni premik* $T_{\mathbf{a}}$ (*translacija*) premakne točke za dano dolžino v dani smeri, torej nima nobene negibne točke (slika 4).
- *Vrtež* $R_{N,\alpha}$ (*rotacija*) točke "zavrti" v določeni smeri za kot α okrog izbrane negibne točke N, ki ji rečemo *središče vrteža* (slika 5).
- *Zrcaljenje* Z_p preko izbrane premice p poljubno točko T preslika v tako točko T', da je daljica TT' pravokotna na p in da p daljico TT' razpolavlja (slika 6). Včasih govorimo tudi o zrcaljenju preko izbrane točke. Bralec naj sam pove definicijo in se prepriča, da je to kar vrtež za kot 180°.



Slika 4. Vzporedni premik



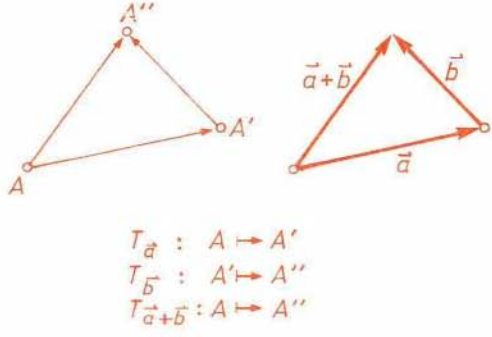
Slika 5. Vrtež



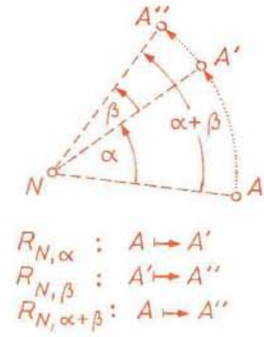
Slika 6. Zrcaljenje

Izometrije *sestavljamo*, kakor smo pač vajeni sestavljati preslikave. Rečemo tudi, da tvorimo njihov *produkt*. Pravzaprav lahko vsako izometrijo zapišemo kot sestavo *osnovnih izometrij* - od tod njihovo ime. Če je produkt dveh izometrij identiteta, pravimo, da sta si izometriji *nasprotni* (*inverzni*). Bralec naj se prepriča, da je v produktu dveh nasprotnih izometrij vrstni red sestavljanja nepomemben (zato lahko rečemo, da je nasprotnost vzajemna). Navedimo nekaj zgledov:

- Dva vzporedna premika $T_{\mathbf{a}}$ in $T_{\mathbf{b}}$ sestavimo v nov vzporedni premik $T_{\mathbf{a}+\mathbf{b}} = T_{\mathbf{b}}T_{\mathbf{a}} = T_{\mathbf{a}}T_{\mathbf{b}} = T_{\mathbf{b}+\mathbf{a}}$; pri tem je vrstni red sestavljanja premikov nepomemben (slika 7). Nasprotni vzporedni premik k danemu je kar vzporedni premik za isto dolžino, le da v nasprotni smeri: $T_{-\mathbf{a}}T_{\mathbf{a}} = T_{\mathbf{a}}T_{-\mathbf{a}} = I$.
- Dva vrteža $R_{N,\alpha}$ in $R_{N,\beta}$ okrog iste točke sestavimo v nov vrtež $R_{N,\alpha+\beta}$. Tudi vrstni red sestavljanja vrtežev z istim središčem je nepomemben: $R_{N,\alpha+\beta} = R_{N,\beta}R_{N,\alpha} = R_{N,\alpha}R_{N,\beta} = R_{N,\beta+\alpha}$.
  Nasprotni vrtež dobimo z vrtežem v obratni smeri:
  $R_{N,-\alpha}R_{N,\alpha} = R_{N,\alpha}R_{N,-\alpha} = I$ (slika 8).

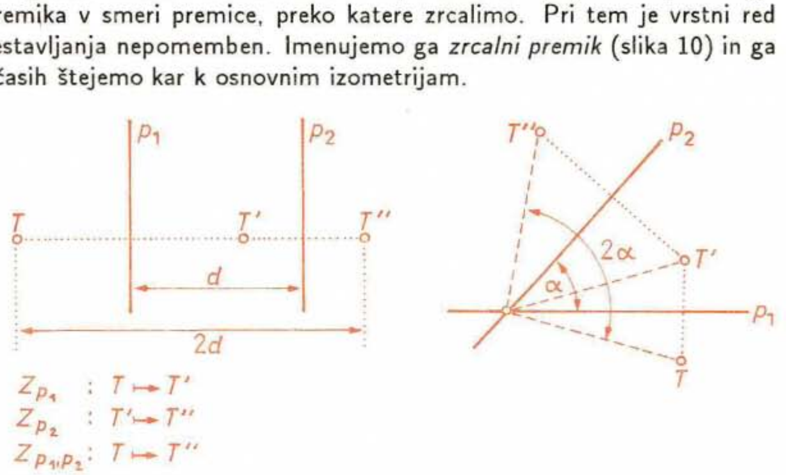


Slika 7. Sestava vzporednih premikov



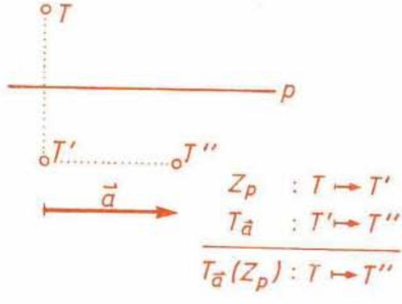
Slika 8. Sestava vrtežev

- Pri zrcaljenjih ni vse tako preprosto. Sestava $Z_{p_1} Z_{p_2}$ zrcaljenja Z_{p_1} preko premice p_1 in zrcaljenja Z_{p_2} preko premice p_2 je bodisi vzporedni premik bodisi vrtež. Če sta premici p_1 in p_2 vzporedni, gre za vzporedni premik, če se premici p_1 in p_2 sekata, je sestavljena izometrija vrtež. V prvem primeru je razdalja med prvotno in preslikano točko enaka dvakratni razdalji premic p_1 in p_2. V drugem primeru je kot sestavljenega vrteža enak dvakratnemu kotu med p_1 in p_2 (slika 9). Obakrat je pomemben vrstni red: nasploh velja $Z_{p_1} Z_{p_2} \neq Z_{p_2} Z_{p_1}$. Zrcaljenje preko iste premice pa je samo sebi nasprotno: $Z_p Z_p = I$.
- Od preostalih možnosti omenimo le produkt zrcaljenja in vzporednega premika v smeri premice, preko katere zrcalimo. Pri tem je vrstni red sestavljanja nepomemben. Imenujemo ga *zrcalni premik* (slika 10) in ga včasih štejemo kar k osnovnim izometrijam.



Slika 9. Sestava zrcaljenj

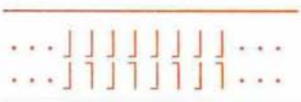
Zdaj lahko povemo, kaj je izometrija kakega omejenega ali neomejenega dela ravnine. Definicija je enaka kot prej, le da mora v tem primeru izometrija preslikati izbrani del ravnine samega nase. To pomeni, da smo tu bolj omejeni kot pri izometrijah vse ravnine. Vzemimo na primer neskončno dolg trak. Od osnovnih tipov izometrij pridejo v poštev (poleg identitete) kvečjemu vzporedni premik vzdolž traku, vrtež za 180^o okrog točke na srednjici ter zrcaljenja preko srednjice traku oziroma preko premice, ki je pravokotna na srednjico.



Slika 10. Zrcalni premik

Končno se lotimo *ornamentov*. Zaradi enostavnosti obravnavajmo v tem članku samo ornamente na neskončnem traku. Ornamente na ravnini si bomo ogledali morda kdaj kasneje.

Najprej se dogovorimo, kaj *ornament na traku* sploh je. Občutek nam narekuje, da je to vsaka risba "sestavljena iz končnega vzorca", ki se vzdolž traku "neskončnokrat ponovi", na primer



Ta formulacija je nekoliko ohlapna, natančno definicijo naslonimo na znanje o izometrijah.

Ornament na danem traku je vsaka risba na tem traku, za katero obstaja tak $d_o > 0$, da velja

- vzporedni premik za dolžino d_o risbo *ohranja*, to je, pri tem premiku risba preide "sama vase". Še drugače: risba je *neobčutljiva* (*invariantna*) na ta premik.
- za noben pozitiven d, $d < d_o$, vzporedni premik za dolžino d risbe ne ohranja.

Definicija terja nekaj razlage. Prva točka zagotavlja, da ornament sestavlja ponavljajoči se končni vzorec. To je kar del risbe na poljubnem "koščku traku" z dolžino d_o. Pozor: ornamentov je neskončno, ker je neskončno mnogo različnih vzorcev; obstaja pa tudi neskončno mnogo vzorcev, ki porodijo enak ornament! Bralec bo sam uvidel, da je ornament neobčutljiv na vsak vzporedni premik za dolžino $d = kd_o$, $k \in \mathcal{N}$, a ni neobčutljiv na noben drug vzporedni premik. Ali drugače: vsak ponavljajoči se vzorec, ki sestavlja ornament, je "večkratnik" kakega vzorca z dolžino d_o. To pa je natanko vsebina druge točke v definiciji ornamenta: zahteva, da je vzorec z dolžino d_o - *osnovni vzorec* - najkrajši vzorec, s katerim še lahko napolnimo trak. Tako na primer risba

ni ornament, ker je neobčutljiva na poljubno majhen vzdolžni premik in ni najmanjšega vzorca; prav zato deluje za oko kar nekam dolgočasno.

Deloma smo tako že odgovorili na začetno vprašanje o urejenosti in zgradbi ornamentov na traku. Njihova temeljna značilnost je, da so neobčutljivi na vzporedni premik (kot tip izometrije). Za popolnejši odgovor pa se moramo ozreti ne le na vzporedni premik, ampak na *vse mogoče tipe izometrij*, na katere je dani ornament neobčutljiv. Na primer: ornament z osnovnim vzorcem ⌋ ohranja edino vzporedni premik. Kaj pa ornament z vzorcem ⌋ ⌉? Tega ohranja tudi zrcalni premik (za polovično osnovno dolžino). Zato bomo rekli, da ima ta drugi ornament bolj zapleteno in bogatejšo simetrijo.

Definirajmo: *Simetrijo ornamenta* predstavljajo vsi različni tipi izometrij, ki ornament ohranjajo. Ne bo odveč, če pripomnimo, da izraz simetrija uporabljamo v bolj splošnem pomenu, kot je navada v vsakdanjem življenju, ko dojemamo simetrijo pač kot neobčutljivost na zrcaljenje preko kake premice. Ali moremo že iz samega vzorca uganiti, da bo ornament imel bogatejšo simetrijo? Lahko, če ima že vzorec sam v sebi simetrijo. To pomeni, da je neobčutljiv na izometrijo, ki ni identiteta (v poštev pridejo edino zrcaljenji ter vrtež). Poglejmo nekaj primerov. Črke **E, A, N** so trije preprosti simetrični vzorci. Prvo ohranja vodoravno zrcaljenje, drugo navpično zrcaljenje, tretjo vrtež. Črko **H** ohranjajo vse tri izometrije, ki ohranijo črke **E, A in N** (slika 11). Pripadajoči ornamenti

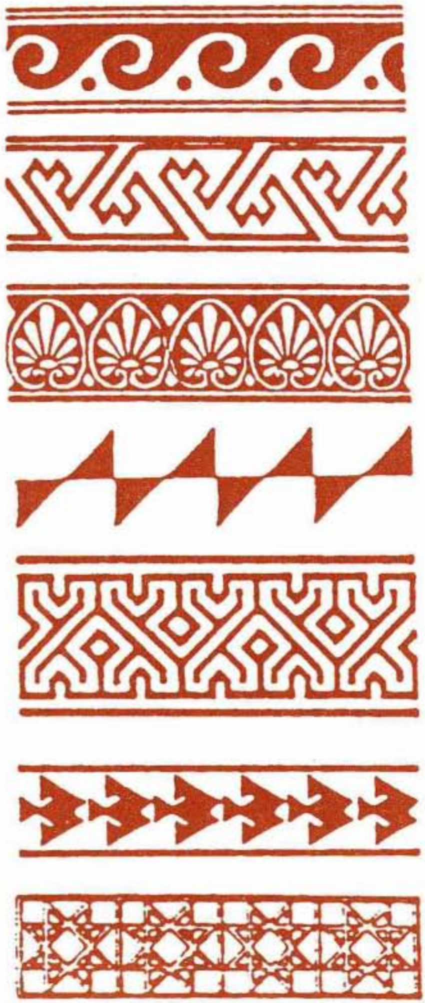
. . . **E E E E E E** . . .
. . . **A A A A A A** . . .
. . . **N N N N N N** . . .
. . . **H H H H H H** . . .

Slika 11. Simetrije vzorcev

imajo zato različne simetrije. Seveda je lahko vzorec povsem nesimetričen (ohranja ga le identiteta), ornament pa je kljub temu neobčutljiv na izometrijo, ki ni vzporedni premik. Primer za to je prav ornament z vzorcem ⌋⌉.

Naredimo tale sklep: po simetriji lahko ornamente razvrstimo v *simetrijske skupine* s pravilom: dva ornamenta sodita v enako skupino, če imata enako simetrijo. Na primer, vzorci, ki so neobčutljivi zgolj na vzporedni premik, tvorijo skupino, ki ima očitno najrevnejšo simetrijo. Skupaj sodijo tudi ornamenti

. . . **A A A A A A** . . .
. . . **V V V V V V** . . .
. . . **bd bd bd bd** . . .
. . . **bddbbd bddbbd** . . .



Slika 12. Primeri ornamentov na traku z različnimi simetrijami: starogrški (a), srednjeveški (b), starogrški (c), indijanski (pleme Navajo)(d), islamski (e), inkovski (f) in kitajski (g).

Bralec naj ugotovi, katere izometrije jih ohranjajo. Mogoče je pokazati, da je simetrijskih skupin ornamentov na traku natanko 7 (slika 12).

Ornamenti	simetrijske operacije
1. ...⌋ ⌋ ⌋ ⌋ ⌋ ⌋ ⌋ ⌋...	1 vzporedni premik
2. ...⌋ ⌉ ⌋ ⌉ ⌋ ⌉ ⌋ ⌉...	1 vzporedni premik in 1 zrcaljenje
3. ...**V V V V V V**...	1 vzporedni premik in 1 zrcaljenje
4. ...**N N N N N N**...	1 vzporedni premik in 1 zasuk za 180^o
5. ...**V Λ V Λ V Λ**...	1 zrcaljenje in 1 zasuk za 18o^o
6. ...**E E E E E E**...	1 vzporedni premik in 1 zrcaljenje
7. ...**H H H H H H**...	3 zrcaljenja

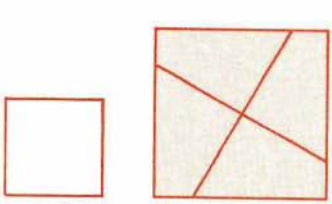
Ali ni prav presenetljivo spoznanje, da se pri ustvarjanju ornamentov povezujeta dve tako različni zahtevi, kot sta neizmerna svoboda pri izbiri vzorca in neizprosna geometrijska omejitev? Ornamenti že tisočletja privlačijo umetnike in obrtnike z vseh celin. Pri risanju ornamentov so se, ne da bi se tega zavedali, opirali na zakone, ki so jih matematiki dokončno utemeljili šele v 19. stoletju.

Milena Strnad

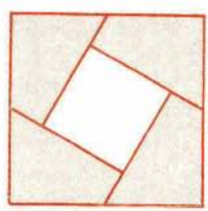
KVADRATNA SESTAVLJANKA - Rešitev s str. 83

Za $n = 1$ nimamo česa dokazovati.

Posebej poglejmo, kako je pri $n = 2$. Če kvadrata nista enaka, označimo stranico večjega z a, stranico manjšega z b. Na stranicah večjega odmerimo



Slika 1



Slika 2