PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **19** (1991/1992)
Številka 1
Strani 2–6

Marija Vencelj:

EULERJEVA POLIEDERSKA FORMULA

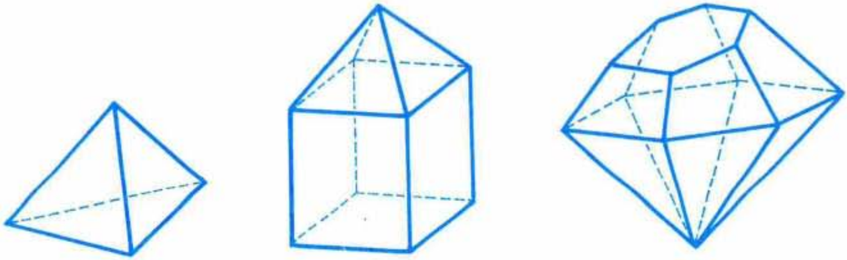
Ključne besede: matematika, geometrija.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/19/1075-Vencelj.pdf

MATEMATIKA

EULERJEVA POLIEDRSKA FORMULA

Se še spomnite, kako ste v osnovni šoli ob prvem srečanju s kocko ali tetraedrom šteli, koliko oglišč imata, pa koliko robov in stranskih ploskev? Bi napravili to še za telesa na sliki 1? Vsakemu od teles poiščite število oglišč (vrhov) V, število robov R in število stranskih ploskev S.



Slika 1

Nato za vsako teh teles izračunajte vrednost izraza

$$V - R + S \tag{1}$$

Sedaj pa napravite to še s pravo nogometno žogo, tako, ki je sešita iz samih petkotnih in šestkotnih usnjenih krpic. Nič hudega ni, če ni dovolj napihnjena za dober nogomet. Tako bo še bolj podobna oglatemu telesu. Toda tudi pri dobro napihnjeni žogi ne morete zgrešiti, kaj morate šteti za oglišče, kaj za rob in kaj za stransko ploskev. Za tiste, ki žoge nimate pri roki, naj povem, da jo sestavlja 12 petkotnikov in 20 šestkotnikov. Do prve brce so petkotniki črni in šestkotniki beli, njihovo razporeditev pa lahko uganete s karikature.

Ste izračunali vrednost izraza (1) in ste presenečeni? Ali pa vam rezultat postaja všeč?

Gre za preprosto geometrijsko resnico, ki so jo poznali že stari Grki in je privlačevala pozornost matematikov več kot dva tisoč let, preden jo je leta 1752 dokazal veliki švicarski matematik Leonhard Euler.

Euler je dokazal, da *za poljuben enostaven polieder velja formula*

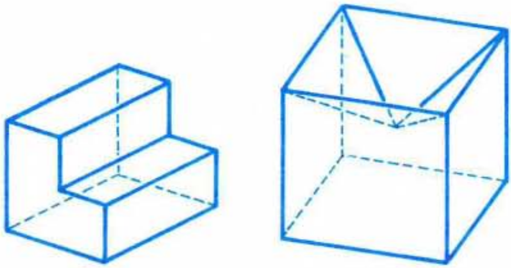
$$V - R + S = 2 \tag{2}$$

ki jo imenujemo Eulerjeva poliedrska formula. Saj ste vedno dobili tak rezultat, kajne?

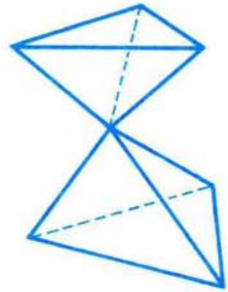
In kaj vse sodi med *enostavne* poliedre? S strogo definicijo se ne bomo ukvarjali, za dober občutek pa bo zadoščalo naslednje: Opazujmo samo mejno ploskev (površino) poliedra. Če ni povezana, to je, če sestoji iz dveh ali več ločenih kosov, polieder ni enostaven. Če pa je mejna ploskev povezana, je polieder enostaven, kadar je ta mejna ploskev taka, da bi jo bilo moč, če bi bila narejena iz primerno prožnega materiala, napihniti v krogelno ploskev (sfero). Očitno vsa telesa s slike 1 izpolnjujejo ta pogoj, pa tudi žoga. Na sliki 2a je še nekaj enostavnih poliedrov. Da pa enostavnost poliedra za veljavnost formule (2) ni nebistven pogoj, kaže primer 2b. Telo na sliki 2b sestoji iz dveh tetraedrov s skupnim ogliščem in očitno ni enostaven polieder, saj bi ga v tistem skupnem oglišču ne mogli "razpihniti". Zanj (2) ne velja, pač pa je $V - R + S = 3$.

Eulerjevo poliedrsko formulo bomo dokazali le za *konveksne (izbočene) poliedre*, posebno podmnožico enostavnih poliedrov.

Definicija. *Konveksen polieder je tak omejen presek končnega števila polprostorov, ki ne leži ves v eni ravnini.*



Slika 2a



Slika 2b

Konveksen polieder ima očitno končno mnogo oglišč, robov in stranskih ploskev. Stranske ploskve so konveksni večkotniki.

Dokaz formule (2). Naj bo P konveksen polieder, število njegovih oglišč naj bo V, število robov R in S število stranskih ploskev. Opazujmo vse premice, ki jih je moč položiti skozi vse možne pare njegovih oglišč. Nato izberimo tako ravnino Q_0, ki ni vzporedna nobeni teh premic.

Ta drobni tisk lahko preskočijo vsi tisti, ki jih ni nič zaskrbelo, ali taka ravnina sploh obstaja. Z dvomljivci - upam, da je kaj tudi takih - pa poglejmo, kako je z njenim obstojem. Naj bodo $p_1, p_2, ..., p_m$ opazovane premice in O poljubna točka v prostoru. Označimo s Q_i, $i = 1, 2, ..., m$, ravnine, ki potekajo skozi O in pravokotno na p_i. Nadalje izberimo tako premico p_0, ki bo potekala skozi O in ne bo ležala v nobeni od ravnin Q_i. Tu imamo očitno še zelo široko izbiro. Premica p_0 ni pravokotna na nobeno od opazovanih premic p_i, $i = 1, 2, ..., m$. Poljubna ravnina, pravokotna na p_0, ima tedaj lastnost, da ni vzporedna nobeni teh premic.

Zaradi lažjega izražanja predpostavimo, da je ravnina Q_0 vodoravna in da vsa oglišča leže nad njo.

Očitno je, da leže posamezna oglišča poliedra P na različnih višinah glede na Q_0. Izberimo jim oznake glede na njihovo višino: A_1 naj bo najnižje, A_2 naslednje, ..., A_V najvišje oglišče.

Vsaki stranski ploskvi poliedra pripada pri tem natanko določeno oglišče, ki je za to stransko ploskev najnižje. Enako velja za robove. Označimo z R_i in $S_i (i = 1, 2, ..., V)$ število robov, oziroma stranic, ki jim je A_i najnižje oglišče. Seveda je $R_V = S_V = 0$. Nadalje je očitno

$$R = R_1 + R_2 + ... + R_{V-1} \tag{3}$$

in

$$S = S_1 + S_2 + ... + S_{V-1} \tag{4}$$

Med R_i in S_i veljajo določene zveze. Prva

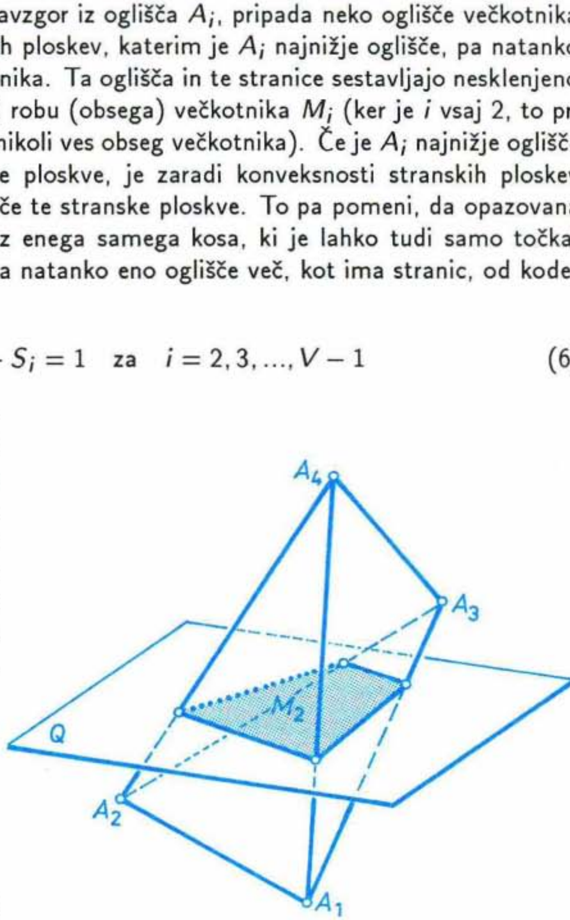
$$R_1 = S_1 \tag{5}$$

je očitna, saj se v najnižjem oglišču stika prav toliko robov kot stranic in vsem je to oglišče najnižje.

Da bomo dobili ostale zveze, presekajmo polieder P med ogliščema A_i in $A_{i+1} (i = 2, 3, ..., V-1)$ z ravnino, vzporedno ravnini Q_0. Presek je konveksen večkotnik, ki ga označimo z M_i. Vsakemu izmed R_i robov poliedra P, ki izhajajo navzgor iz oglišča A_i, pripada neko oglišče večkotnika M_i, vsaki od S_i stranskih ploskev, katerim je A_i najnižje oglišče, pa natanko določena stranica večkotnika. Ta oglišča in te stranice sestavljajo nesklenjeno poligonsko črto, ki je del robu (obsega) večkotnika M_i (ker je i vsaj 2, to pri konveksnem poliedru ni nikoli ves obseg večkotnika). Če je A_i najnižje oglišče dveh robov iste stranske ploskve, je zaradi konveksnosti stranskih ploskev hkrati tudi najnižje oglišče te stranske ploskve. To pa pomeni, da opazovana poligonska črta sestoji iz enega samega kosa, ki je lahko tudi samo točka. Taka poligonska črta ima natanko eno oglišče več, kot ima stranic, od koder takoj sledi zveza

$$R_i - S_i = 1 \quad \text{za} \quad i = 2, 3, ..., V-1 \tag{6}$$

Postopek je ilustriran na sliki 3. Polieder P je tam tetraeder, $i = 2$, M_2 je konveksen štirikotnik, temu koraku prirejena poligonska črta pa sestoji le iz ene stranice in dveh oglišč. Na sliki je označena pikčasto.



Slika 3