

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 14 (1986/1987)

Številka 6

Strani 310-313

Marko Razpet:

ŠE O UPORABI REKURZIVNIH FORMUL

Ključne besede: računalništvo, matematika.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/14/859-Razpet.pdf>

© 1987 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

ŠE O UPORABI REKURZIVNIH FORMUL

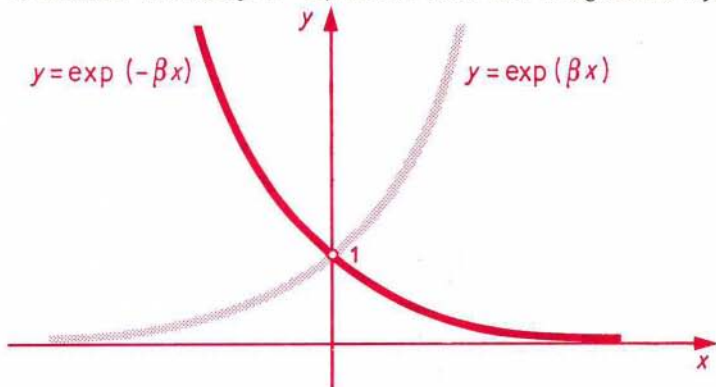
Nadaljujmo naša razmišljanja o uporabi rekurzivnih formul, ki smo jih začeli v četrti številki Preseka.

Najprej nekaj pojasnil v zvezi z eksponentno funkcijo. Naj bo a izbrano pozitivno število, različno od 1. Za vsako naravno število n definiramo $a^n = a.a\dots a$, kjer je v produktu n enakih faktorjev a . Posebej je $a^1 = a$. Za dve naravni števili m in n velja $a^{m+n} = a^m a^n$. Nato definiramo a^n za poljubno celo število n . Če je n negativno celo število, postavimo $a^n = 1/a^{-n}$. Za $n = 0$ postavimo $a^0 = 1$. Identiteta $a^{m+n} = a^m a^n$ velja potem tudi za dve poljubni celi števili m in n . V naslednjem koraku definiramo a^r za racionalna števila r . Če je r ulomek p/q , postavimo $a^{p/q} = q\sqrt[q]{a^p}$. Nazadnje definiramo a^x , kjer je x realno število. To gre približno tako: izberemo poljubno zaporedje racionalnih števil r_1, r_2, \dots , ki se z rastočim indeksom približujejo številu x . Opazujemo zaporedje $a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \dots$. To zaporedje z rastočim indeksom stremi k nekemu točno določenemu realnemu številu, ki ga označimo z a^x . Preslikava, ki vsakemu realnemu številu x priredi vrednost a^x , je eksponentna funkcija. Število a je njena osnova. Najpomembnejša lastnost eksponentne funkcije je:

$$(1) \quad a^{x+y} = a^x a^y$$

za poljubni realni števili x in y , razen tega pa velja še: $a^0 = 1$, za $a > 1$ je funkcija $x \mapsto a^x$ naraščajoča, za $0 < a < 1$ pa padajoča, zavzame pa lahko samo pozitivne vrednosti.

Zaporedje števil a_1, a_2, a_3, \dots , kjer je splošni člen dan z izrazom $a_n = (1 + 1/n)^n$, stremi proti neki vrednosti, ki jo v matematiki označujemo s črko e . Približna vrednost je $e = 2,718\ 281\ 828\ 459$. Poleg števila π je to eno



od najpomembnejših števil v matematiki. In ravno število e izberemo za osnovo eksponentne funkcije, ki jo bomo potrebovali. Dostikrat namesto e^x pišemo raje $\exp x$. Adicijski izrek (1) je potem

$$(2) \quad \exp(x + y) = \exp x \exp y$$

BASIC tudi pozna to funkcijo, to je funkcijo EXP.

Za pozitivno realno število β si oglejmo funkciji $x \mapsto \exp(\beta x)$ in $x \mapsto \exp(-\beta x)$. Prva je naraščajoča, in to tem bolj, čim večji je β , druga pa je padajoča. Čim večji je β , tem hitreje pada. Prvi ustreza zakon naravne rasti, drugi pa zakon radioaktivnega razpada.

Po tej pripravi si oglejmo krivuljo $y = A \exp(-\beta x) \sin(\omega x + \varphi)$. To je *krivulja dušenega nihanja*. Kasneje nekaj besed o njenem imenu. Število $\beta > 0$ bomo imenovali koeficient dušenja. Na računalniku bomo narisali to krivuljo podobno kot na začetku sinusoido. Najprej pa moramo priti do primerne rekurzivne formule. Abscisam $x_0 = 0$, $x_1 = \delta$, $x_2 = 2\delta$, ... priredimo ustrezne ordinate y_0, y_1, y_2, \dots :

$$y_k = A \exp(-\beta x_k) \sin(\omega x_k + \varphi), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Vpeljemo pomožno zaporedje z_0, z_1, z_2, \dots , kjer je $z_k = A \sin(\omega x_k + \varphi)$. Potem lahko zapišemo krajše

$$y_k = z_k \exp(-\beta x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Iz četrte številke Preseka že vemo, da velja

$$z_{k+1} = 2 z_k \cos(\delta \omega) - z_{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Odtod hitro dobimo zvezo

$$(3) \quad y_{k+1} = 2 y_k \exp(-\beta \delta) \cos(\delta \omega) - y_{k-1} \exp(-2\beta \delta)$$

Označimo

$$c = 2 \exp(-\beta \delta) \cos(\delta \omega), \quad d = \exp(-2\beta \delta)$$

Rekurzivno formulo (3) še enkrat prepisemo:

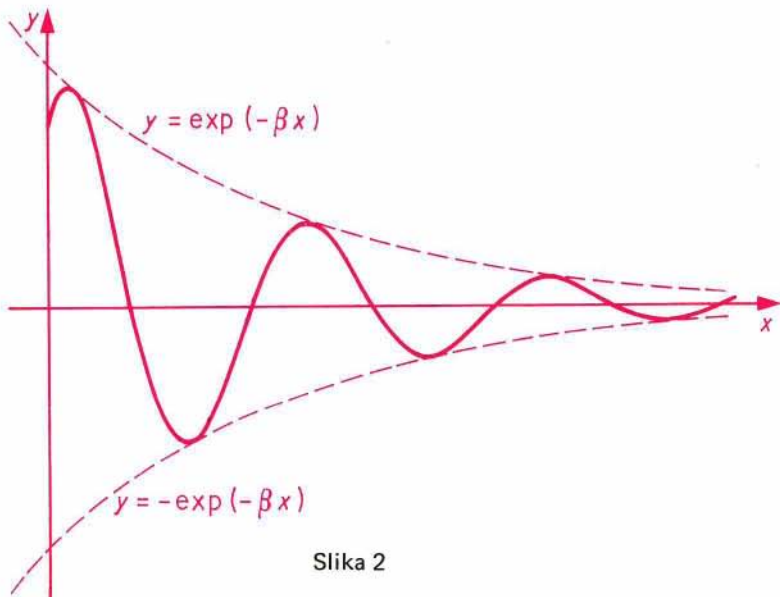
$$(4) \quad y_{k+1} = c y_k - d y_{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Če poznamo y_0 in y_1 , potem lahko postopoma izračunamo y_2, y_3 itd. Pri danih parametrih $A, \omega, \varphi, \beta$ in izbranem koraku δ imamo $y_0 = A \sin \varphi$ in $y_1 = A \exp(-\beta \delta) \sin(\delta \omega + \varphi)$.

Sedaj napišemo nov program, v katerem bomo lahko sami spreminjali vse omenjene parametre.

```
10 LET m=50: LET a=70
20 LET fi=PI/2: LET b=.09
45 LET f=PI/m
50 LET b1=EXP(-b*f)
60 LET d=b1*b1
90 PLOT 0,75: DRAW 255,0
100 LET y0=a*SIN fi
105 LET y1=a*b1*SIN( f+fi)
110 LET c=2*b1*COS f
120 FOR x=0 TO 255
130     PLOT x, y0+75
140     LET y2=c*y1-d*y0
150     LET y0=y1: LET y1=y2
160 NEXT x
```

Krivuljo dušenega nihanja dobimo prav tako hitro kot sinusoido. V vrstici 10 lahko spremenimo amplitudo a , gostoto točk m . V vrstici 20 pa pomeni fi začetno fazo φ , medtem ko koeficient dušenja β predstavlja spremenljivka b .



Slika 2

