PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **14** (1986/1987)
Številka 4
Strani 212–215

Izidor Hafner:

McCULLOCHOVI STROJI

Ključne besede: matematika, razvedrilo.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/14/849-Hafner.pdf

MCCULLOCHOVI STROJI

V knjigi **The lady or the tiger** je Raymond Smullyan uvedel novo vrsto logičnih nalog. V teh je treba najti kombinacijo znakov, ki mora izpolnjevati določene pogoje.

Recimo, da imamo na razpolago le nize črtic. Niz *n* črtic, to je III...I, naj pomeni naravno število *n*. Potem lahko definiramo pojem "liho število" takole:

1. I je liho število.
2. Če je *X* liho število, potem je tudi *X* II liho število.

Kako bi preverili, da je IIIII liho število? Po drugem pogoju bo IIIII liho, če je III liho. Po istem pogoju bo III liho, če je I liho. Toda I je liho po pravilu 1, torej je liho tudi III oziroma IIIII.

Takšne naloge imajo še drug pomen. V programskem jeziku **prolog** je program množica takšnih pogojev. Prologov **interpreter** pa rešuje nalogo na podoben način, kot smo jo mi.

Vrnimo se k Smullyanovi knjigi.

Inšpektor Craig je obiskal prijatelja McCullocha, ki se je ukvarjal z izdelavo čudnih strojev, prednikov današnjih računalnikov. Seveda se je vse to dogajalo precej pred izumom prvih elektronskih računalnikov. Ko sta se že nekaj časa pogovarjala, katera števila stroj sprejme in katerih ne, se je njun pogovor nadaljeval takole:

"Dovoli, da ti pojasnim pravila," je nadaljeval McCulloch. "**Število** zame pomeni **naravno** število; moj stroj za zdaj ne računa z negativnimi števili in ulomki. Število *N* zapišemo na običajen način kot zaporedje znakov 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Toda stroj lahko sprejme le števila, v katerih 0 ne nastopa, na primer, 23 in 5492, ne pa 502 ali 3250607. Vzemimo dve števili: *N*, *M*. Potem *NM* ne pomeni *N* krat *M*, pač pa je *NM* število, ki ga dobimo tako, da najprej zapišemo *N*, nato pa **pripišemo** *M*. Recimo, da je *N* število 53, *M* pa 728, potem je *NM* število 53728."

"Kakšna čudna operacija s števili," se je začudil Craig.

"Vem," je odvrnil McCulloch, "toda to operacijo stroj razume najbolje. Kakorkoli že, naj ti razložim pravila te operacije. Pravim, da število *X* **producira** število *Y*, če stroj sprejme število *X* in če potem, ko ga damo v stroj, iz stroja pride kot rezultat število *Y*. Prvo pravilo je tole:

Pravilo 1: Za poljubno število *X* je število 2*X* (to je 2, ki mu sledi *X*, ne pa 2 krat X) sprejemljivo in $2X$ producira X."

"Recimo, 253 producira 53; 27482 producira 7482. Drugače povedano, če vstavimo $2X$ v stroj, nam le-ta zbriše 2 na začetku in to, kar ostane, X, stroj vrne."

"To je precej enostavno," je odgovoril Craig. "Katera so ostala pravila?"

"Samo še eno pravilo je," je odgovoril McCulloch, "toda prej moram opredeliti še tole: številu $X2X$ pravim **pridruženo** število k številu X. Torej je 727 pridruženo k številu 7. Drugo pravilo je takole:

Pravilo 2: Če X producira Y, potem $3X$ producira število, ki je pridruženo k Y (to pa je $Y2Y$).

"Na primer: 27 producira 7 po prvem pravilu. Zato 327 producira 727, ki je pridruženo k 7."

. . . .

Zdaj pa zastavimo nekaj nalog z našim strojem.

1. Poišči število N, ki producira samo sebe.
2. Poišči število N, ki producira $N2N$.
3. Poišči število N, ki producira $7N$.
4. Poišči takšno število N, da število $3N$ producira $N2N$.

Rešitve

Najprej zapišimo pravili simbolično. Izjava

$$X \text{ producira } Y$$

seveda pomeni, da X producira Y. Uporabimo še **implikacijo** in pravili se glasita:

Pravilo 1: $2X$ producira X.

Pravilo 2: X producira $Y \Rightarrow 3X$ producira $Y2Y$.

V nadaljevanju bomo z $A, B, \ldots$ zaznamovali nize iz znakov 1 – 9 vključno s praznim nizom. X, Y, N pa pomenijo neprazne nize.

1. Iščemo takšno število, da bo veljalo

$$N \text{ producira } N$$

Prvo pravilo ne pride v poštev. Če hočemo uporabiti drugo, mora veljati

$$3X = N \quad \text{in} \quad Y2Y = N \quad \text{ter} \quad X \text{ producira } Y$$

Ker mora biti $3X = Y2Y$, se mora Y začeti s 3: $Y = 3A$. Torej

$$3X = 3A23A, \quad X = A23A$$
$$A23A \text{ producira } 3A$$

Če je A prazen niz, je to že rešitev, saj

$$23 \text{ producira } 3$$

po pravilu 1.

$$N = 3X = 323$$

2. Iščemo število N, da velja

$$N \text{ producira } N2N$$

Po drugem pravilu mora biti

$$N = 3X, \quad N2N = Y2Y, \quad X \text{ producira } Y$$

Prvi dve enačbi zahtevata

$$3X23X = Y2Y$$

to je $Y = 3X$, in veljati mora še X producira $3X$.
Po drugem pravilu mora biti

$$X = 3X', \quad 3X = Y'2Y', \quad X' \text{ producira } Y'$$

Prvi dve enačbi dasta

$$33X' = Y'2Y'$$

Zato $Y' = 33A$, $33X' = 33A233A$, $X' = A233A$. Seveda mora biti še

$$A233A \text{ producira } 33A$$

Če vzamemo za A prazen niz, po pravilu 1 velja: 233 producira 33. Torej

$$N = 3X = 33X' = 33233$$

3. Kdaj velja: N producira $7N$? Veljati mora

$$N = 3X, \quad 7N = Y2Y, \quad X \text{ producira } Y$$

Od tod $73X = Y2Y$, $Y = 73A$, $73X = 73A273A$, $X = A273A$. Veljati mora še $A273A$ producira $73A$. Za A vzamemo prazen niz, saj 273 producira 73. $N = 3X = 3273$.

4. $3N$ producira $N2N$?

$$3N = 3X, \; N2N = Y2Y, X \text{ producira } Y$$
$$N = X = Y, \; X \text{ producira } X$$

Po nalogi 1 je $N = 323$.