PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **14** (1986/1987)
Številka 3
Strani 156–157

Aleksander Potočnik:

MLADIM VEGOVCEM ZA OGREVANJE

Ključne besede: naloge, matematika.

Elektronska verzija:
http://www.presek.si/14/831-Potocnik-naloge.pdf

NALOGE

MLADIM VEGOVCEM ZA OGREVANJE

1. Janko in Marko sta sklenila kupiti zbirko nalog. Ker je zanjo Janku manjkalo 16 din, Marku pa 4 din, sta se odločila, da jo bosta kupila skupaj. Toda tudi tedaj jima je zmanjkalo 2 din. Koliko stane ta zbirka?

2. V nekem razredu je 35 učencev, med njimi jih je 20 članov matematičnega, 11 pa rokometnega krožka. Koliko matematikov se ukvarja tudi z rokometom, če veš, da 10 učencev ne sodeluje niti v matematičnem niti v rokometnem krožku?

3. Kateri ulomek je večji: 1984/1985 ali 1985/1986?

4. Pokaži, da je razlika kvadratov katerihkoli dveh lihih števil deljiva z 8.

5. Katero število je večje 2^{1986} ali 63^{331}?

6. Določi vse pare števil x in y, za katere velja $x^2 - 6x + (y^2 - 1)^2 + 9 = 0$.

7. Določi vsa naravna števila n, za katera velja neenakost $1/3 < n/12 \leqslant 3/4$.

8. Če delimo 1000 z nekim številom, dobimo ostanek 8, če pa z istim številom delimo 900, dobimo ostanek 1. S katerim številom smo delili števili 1000 in 900?

9. Polmer rombu včrtanega kroga meri četrtino daljše rombove diagonale. Pokaži, da višine romba, ki gredo skozi krajišči krajše diagonale, delijo daljšo diagonalo na tri skladne dele.

10. Katerega leta je rojen dedek Marko, če poznamo naslednje podatke: Rojen je v tem stoletju. Če v njegovi rojstni letnici zamenjamo cifri enic in desetic, dobimo leto, ko bo dedek Marko dopolnil 81 let.

11. Določi vsa taka praštevila p, da bo tudi $p^2 + 13$ praštevilo.

12. Določi vsa naravna števila n, za katera je izraz $10^n - 1$ deljiv z 81.

13. Osnovna robova kvadra merita 3 cm in 4 cm, njegova telesna diagonala pa oklepa z osnovno ploskvijo kot 60^0. Izračunaj površino in prostornino kvadra.

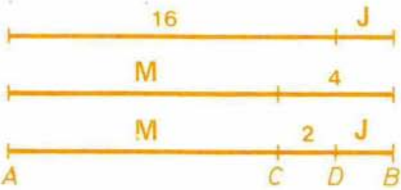
14. Mačka in pol poje v dveh dneh in pol tri miši in pol. Koliko miši bo pojedlo 100 mačk v 45 dneh?

15. Kvadrat je razdeljen na 9 enakih kvadratov. Ali je mogoče vanje vpisati števila 1, 2 in 3 tako, da bodo v vsaki vrsti, vsakem stolpcu in na vsaki diagonali različne vsote?

REŠITVE NALOG

MLADIM VEGOVCEM ZA OGREVANJE – rešitve nalog s str. 156

1.



Nalogo lahko rešimo s pomočjo daljic. Janku za zbirko manjka 16 din (prva daljica), Marku pa 4 din (druga daljica). Janku in Marku skupaj manjka 2 din (tretja daljica). Ker je $\overline{BC} = 4$, $\overline{CD} = 2$, zato je $\overline{BD} = 2$. Janko je imel samo 2 din. Ker je cena knjige enaka $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{BD} = 16 + 2$, vidimo, da knjiga stane 18 din.

2. V oba krožka je vključenih skupno 25 učencev. Naj x označuje število učencev, ki obiskujejo matematični in rokometni krožek. Tedaj je samo v matematični krožek vključenih $20 - x$, v rokometni pa $11 - x$ učencev. Dobimo enačbo $20 - x + x + 11 - x = 25$ in odtod $x = 6$.

3. $\frac{1984}{1985} = 1 - \frac{1}{1985}$ in $\frac{1985}{1986} = 1 - \frac{1}{1986}$

Ker je $\frac{1}{1985} > \frac{1}{1986}$, je $1 - \frac{1}{1985} < 1 - \frac{1}{1986}$ in zato $\frac{1984}{1985} < \frac{1985}{1986}$

4. Naj bosta dani lihi števili $2k + 1$ in $2m + 1$. Tedaj je $(2k+1)^2 - (2m+1)^2 = 4k^2 + 4k - 4m^2 - 4m = 4(k(k + 1) - m(m + 1))$. Produkta zaporednih števil sta sodi števili, torej je trditev dokazana.

5. Ker je $2^{1986} = (2^6)^{331} = 64^{331}$, je $2^{1986} > 63^{331}$.

6. $x^2 - 6x + (y^2 - 1)^2 + 9 = 0$

$(x - 3)^2 + (y^2 - 1)^2 = 0$ in odtod $x - 3 = 0$ in $y^2 - 1 = 0$, zato velja $\mathcal{R} = \{(3,1), (3, -1)\}$

7. Ker je $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$ in $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$, mora biti $n \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$.

8. Če daje 1000 pri deljenju z iskanim številom ostanek 8, potem je $1000 - 8 = 992$ deljivo s tem številom. Podobno je tudi $900 - 1 = 899$ deljivo z istim številom.

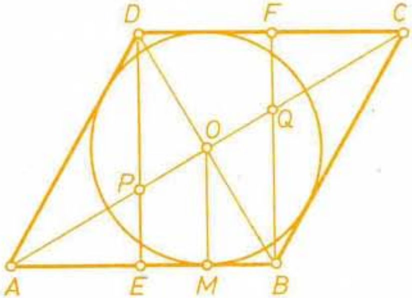
$992 = 2.2.2.2.2.31$

$899 = 29.31$

$D(899, 992) = 31$

Števili 900 in 1000 smo delili z 31.

9.



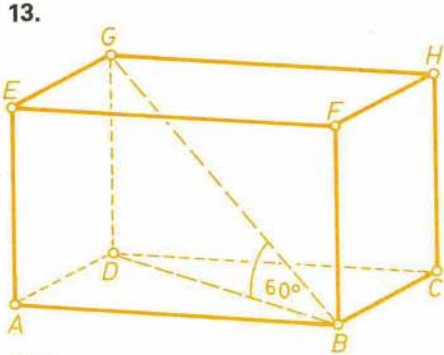
Naj bo O presek diagonal romba in točka M dotikališče krožnice in stranice AB. Ker je trikotnik ΔAOM pravokoten in $OM = r = \frac{1}{4} . AC$, je $OM = r = \frac{1}{2}.OA$ in zato je kot $\sphericalangle AOM = 60^0$ in kot $\sphericalangle OAM = 30^0$. To pomeni, da je $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD = 60^0$, oziroma da sta trikotnika ΔABD in ΔBCD enakostranična. Višini DE in BF romba sekata daljšo diagonalo v točkah P in Q. Ker sta DE in BF tudi višini enakostraničnih trikotnikov ΔABD in ΔBCD, je $AP = 2. OP = 2. OQ = QC$ oziroma $AP = PQ = QC$.

10. Če je dedek Marko rojen leta $19ab$, potem bo leta $19ba$ star 81 let. To pomeni $19ba - 19ab = 81$ in $ba - ab = 81$. Očitno mora biti cifra b večja od 8, zato je $b = 9$ in tedaj $a = 0$. Dedek Marko je rojen leta 1909.

11. Naj bo $p = 2$. Tedaj je $p^2 + 13 = 4 + 13 = 17$. Ker je 17 praštevilo, je $p = 2$ ena rešitev naloge.
Naj bo $p \geqslant 3$. Tedaj je p neparno število in zato p^2 tudi neparno število, vsota $p^2 + 13$ pa parno število in zato deljivo z 2, kar pomeni, da je sestavljeno. Odtod sledi, da je $p = 2$ edina rešitev naloge.

12. Ker je $10^n = 1000...000$, kjer je število ničel enako n, je $10^n - 1 = 999...999$, kjer je število devetk enako n. Število 999...999 je deljivo z 9 in je $999...999 : 9 = 111...111$, kjer je število enic enako n. Da bi bilo število 111...111 deljivo z 9, mora biti vsota cifer deljiva z 9, kar pomeni, da mora biti n deljiv z 9, torej $n \in \{9, 18, 27, ...\}$.

13.



Diagonala osnovne ploskve je enaka $5 \text{ cm} = \sqrt{3^2 + 4^2}$. Ker je trikotnik ΔDBG pravokoten in kot $\sphericalangle DBG = 60^0$, je $\overline{BG} = 10$ cm in $\overline{GD} = c = 5\sqrt{3}$ cm. Površina kvadra je $P = (24 + 70\sqrt{3})\ \text{cm}^2$, prostornina pa $V = 60\sqrt{3}\ \text{cm}^3$.

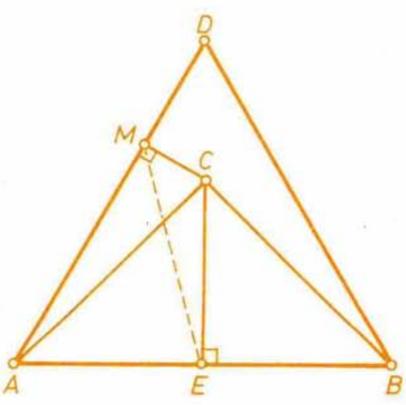
14. Mačka in pol v dveh dneh in pol poje tri in pol miši. To pomeni, da 3 mačke v 5 dneh pojejo $4.3{,}5 = 14$ miši, ena mačka pa v enem dvenu poje $14/15$ miši. Ena mačka v 45 dneh poje $45.\frac{14}{15} = 42$ miši, sto mačk pa v 45 dneh poje $100.42 = 4200$ miši.

15. Kvadrat ima tri vrste, tri stolpce in dve diagonali. Vsota je na vsaki od njih lahko najmanj 3 in največ 9, lahko pa zavzame 7 različnih vrednosti (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Teh 7 različnih vrednosti je treba razporediti na 8 mest (3 vrste, 3 stolpce in 2 diagonali), kar pomeni, da morata biti vsaj na dveh mestih enaki vsoti.

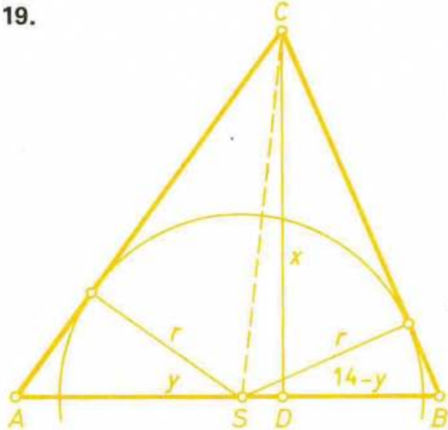
16. Označimo iskano število z $ABCD$. Tedaj je $9.ABCD = DCBA$, ali zapisano drugače: $9000A + 900B + 90C + 9D = 1000D + 100C + 10B + A \leqslant 9999$. Zaradi $A \geqslant 1$ je $9000 \leqslant 9000A \leqslant 9999$, odtod pa je očitno $A = 1$. Podobno velja $9000 \leqslant 1000D \leqslant 9999$ in tedaj $D = 9$. Ti dve vrednosti vstavimo v gornjo enačbo $9000 + 900B + 90C + 81 = 9000 + 100C + 10B + 1$. Odtod sledi $890B = 10C - 80$ oziroma $89B = C - 8$. Zaradi $C - 8 \leqslant 1$ je $89B$ lahko samo 0, torej $B = 0$ in tedaj $C = 8$. Iskano število je 1089.

17. Naj bo $p = 2$. Tedaj je $p^3 + 3^p = 2^3 + 3^2 = 8 + 9 = 17$, zato je $p = 2$ ena rešitev naloge.
Če je $p \geqslant 3$, tedaj mora biti p liho število. Tedaj sta p^3 in 3^p tudi lihi števili, njuna vsota pa sodo število in zato ne more biti praštevilo. Torej je $p = 2$ edina rešitev naloge.

18. Trikotnik $\triangle ACE$ je pravokoten in mu je mogoče očrtati krog, ki ima središče v središču hipotenuze AC. Podobno je tudi s trikotnikom $\triangle ACM$. Torej je mogoče krog očrtati štirikotniku $AECM$. Kota $\sphericalangle CEM$ in $\sphericalangle CAM$ sta skladna, ker sta obodna kota nad tetivo CM. Ker je $\sphericalangle CAM = 60^0 - 45^0 = 15^0$, je tudi $\sphericalangle CEM = 15^0$.



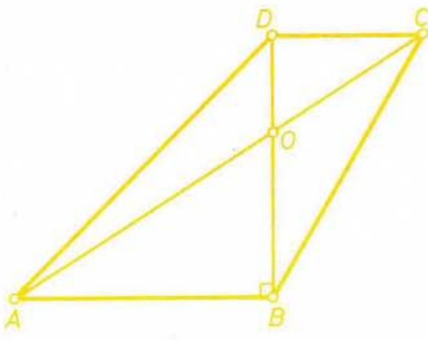
19.



Naj bo D nožišče višine iz oglišča C in označimo $CD = x$, $AD = y$ in zato $BD = 14 - y$. V trikotniku ΔACD in ΔBCD uporabimo Pitagorov izrek in dobimo $x^2 = 15^2 - y^2 = 13^2 - (14 - y)^2$. Sledi $225 - y^2 = 169 - 196 + 28y - y^2$, $28y = 252$ in $y = 9$ cm. Sedaj je $x^2 = 225 - 81 = 144$ in $x = 12$ cm. Ploščina trikotnika je zato $p = 14.12:2 = 84\ \text{cm}^2$, $p = (15r + 13r)/2 = 84$, $r = 6$ in $p_0 = 36\pi\ \text{cm}^2$.

20. Število deklic označimo z x, število dečkov pa z y. Tedaj velja $20x + 30y = 170$ oziroma $2x + 3y = 17$. Ker morata biti x in y naravni števili, mora biti $x \leqslant 8$ in $y \leqslant 5$. Ker je $2x$ sodo število, mora biti $3y$ liho in zato tudi y liho število, torej $y \in \{1, 3, 5\}$. Tedaj je $x \in \{7, 4, 1\}$. Skupina je štela liho število članov, zato so bile v skupini 4 deklice in 3 dečki (možnosti $1 + 7$ in $5 + 1$ odpadeta).

21. Ker velja $AB \parallel CD$, je po Talesovem izreku $AB:CD = BO:DO = 4:2 = 2:1$.



Kota $\sphericalangle DCA$ in $\sphericalangle BAC$ sta skladna, ker imata vzporedne krake, kota $\sphericalangle DCA$ in $\sphericalangle BCA$ pa tudi, kot sledi iz zahtev naloge. Zato velja $\sphericalangle BCA = \sphericalangle BAC$ trikotnik ΔABC je enakokrak in velja $AB = BC = 2x$, če je $CD = x$. Trikotnik ΔBCD je pravokoten, zato iz $BC = 2x$ in $CD = x$ sledi $\sphericalangle BCD = 60^0$ in $BD = 6 = x\sqrt{3}$. Odtod je $x = 2\sqrt{3}$ in ploščina trapeza $p = 18\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

Aleksander Potočnik