PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **14** (1986/1987)
Številka 3
Strani 170–174

Jože Grasselli:

TRIKOTNIŠKA ŠTEVILA

Ključne besede: matematika, teorija števil, trikotniška števila.

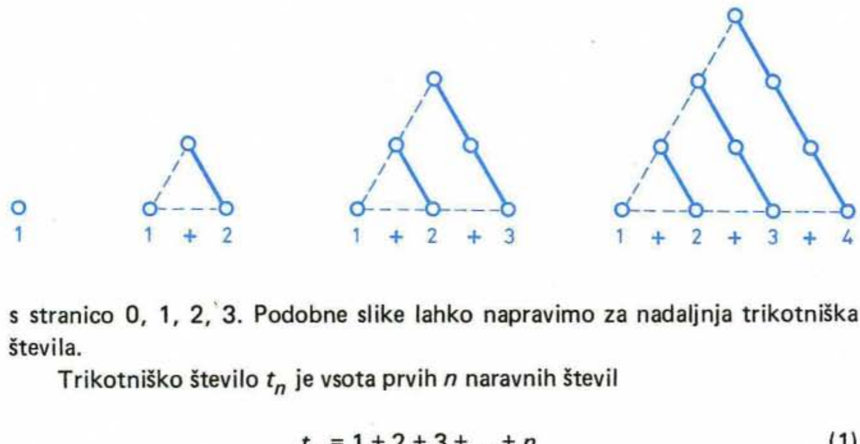
Elektronska verzija: http://www.presek.si/14/831-Grasselli.pdf

TRIKOTNIŠKA ŠTEVILA

Če vzamemo prvo, seštejemo prvi dve, prva tri, prva štiri, ... naravna števila, dobimo

$$t_1 = 1$$
$$t_2 = 1 + 2 = 3$$
$$t_3 = 1 + 2 + 3 = 6$$
$$t_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$
....

Pitagora (580 – 500) je dal tem številom ime *trikotniška*. Števila 1, 3, 6, 10 povedo namreč, koliko je narisanih točk v enakostraničnih trikotnikih



s stranico 0, 1, 2, 3. Podobne slike lahko napravimo za nadaljnja trikotniška števila.

Trikotniško število t_n je vsota prvih n naravnih števil

$$t_n = 1 + 2 + 3 + ... + n \tag{1}$$

Iz t_n najdemo naslednje trikotniško število t_{n+1} tako, da t_n za $n + 1$ povečamo

$$t_{n+1} = t_n + (n + 1) \tag{2}$$

Ker je $t_1 = 1$, lahko iz obrazca (2) pri $n = 1$ izračunamo t_2. Ko poznamo t_2, spet iz (2) pri $n = 2$ izračunamo t_3. Iz znanega t_3 pri $n = 3$ najdemo t_4. In tako naprej. Napravimo si po tem navodilu preglednico za prvih 15 trikotniških števil:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
t_n	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120

Preglednica *A*

Preglednico bi mogli nadaljevati in bi sčasoma dosegli trikotniška števila t_n s poljubno velikim indeksom n. Precej zamudno bi bilo, če bi hoteli na ta način dobiti npr. t_{10000}. Ali se da morda t_n izračunati preprosteje? Odgovor na to vprašanje so poznali že Babilonci. Dognali so, da je

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Če to ugotovitev upoštevamo v (1), dobimo za trikotniško število t_n zvezo

$$t_n = \frac{n\,(n+1)}{2} \qquad (3)$$

Za $n = 10000$ je torej

$$t_{10000} = \tfrac{1}{2} \,.\, 10000 \,.\, 10001 = 50005000$$

Oglejmo si nekaj lastnosti trikotniških števil.
Iz preglednice *A* povzemamo:

$$t_1 + t_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$$
$$t_2 + t_3 = 3 + 6 = 9 = 3^2$$
$$t_3 + t_4 = 6 + 10 = 16 = 4^2$$

V vseh treh primerih je vsota dveh zaporednih trikotniških števil kvadrat naravnega števila. Ali dobimo zmeraj kvadrat, ko seštejemo zaporedni trikotniški števili? Izračunajmo vsoto $t_n + t_{n+1}$ z naslonitvijo na obrazec (3). Pride

$$t_n + t_{n+1} = \tfrac{1}{2}\,n\,(n+1) + \tfrac{1}{2}\,(n+1)(n+2) = \tfrac{1}{2}\,(n+1)(2n+2) = (n+1)^2 \qquad (4)$$

Vidimo:

Vsota dveh zaporednih trikotniških števil je kvadrat naravnega števila.

To lastnost trikotniških števil so gotovo opazili že davno. Prvič je izpričana okrog leta 100 v spisih novopitagorejca Nikomaha. Ko se n spreminja po vseh naravnih številih 1, 2, 3, ..., opiše $n + 1$ vsa naravna števila razen 1. Zaradi (4) so torej vsi od 1 večji kvadrati naravnih števil vsote po dveh zaporednih trikotniških števil.

Po preglednici A je:

$$8t_1 + 1 = 8.1 + 1 = 9 = 3^2$$
$$8t_2 + 1 = 8.3 + 1 = 25 = 5^2$$
$$8t_3 + 1 = 8.6 + 1 = 49 = 7^2$$

Vrednost so spet kvadrati naravnih števil. Da gre tudi tukaj za splošno lastnost trikotniških števil, se lahko hitro prepričamo. Po obrazcu (3) je

$$8t_n + 1 = 8.\tfrac{1}{2}n\,(n+1) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2 \qquad (5)$$

Ko preteče n vsa naravna števila, opiše $2n + 1$ vsa liha naravna števila razen 1. Zato iz (5) izhaja:

Za ena zvečani osemkratnik trikotniškega števila je kvadrat lihega naravnega števila. Vsak od ena večji lihi kvadrat se izraža v tej obliki.

To lastnost trikotniških števil omenja Nikomahov sodobnik Plutarh, pisec življenjepisov slavnih grških in rimskih mož.

V preglednici A sta dva kvadrata:

$$\begin{aligned} t_1 &= 1 = 1^2 \\ t_8 &= 36 = 6^2 \end{aligned} \qquad (6)$$

Ali pri nadaljevanju preglednice naletimo še na kakšen kvadrat? Euler (1707 — 1783) je pokazal, da bi se to zgodilo neskončnokrat. Imeti bi morali seveda neskončno časa, da bi preglednico brez kraja nadaljevali. Kadar je trikotniško število $n\,(n+1)/2$ kvadrat naravnega števila m, drži enačba:

$$n^2 + n = 2m^2$$

Po Eulerjevi ugotovitvi obstaja neskončno parov naravnih števil n, m, ki to enačbo izpolnijo. Dajo se dobiti obrazci, ki zajemajo vse rešitve. Navedimo prva štiri trikotniška števila, ki so kvadrati in pridejo za kvadratoma 1 in 36 iz (6). To so:

$$t_{49} = 49.25 = (5.7)^2$$
$$t_{288} = 144.289 = (12.17)^2$$
$$t_{1681} = 1681.841 = (41.29)^2$$
$$t_{9800} = 4900.9801 = (70.99)^2$$

Omenili smo, da je med trikotniškimi števili neskončno kvadratov. Koliko pa je kubov? In bikvadratov (četrtih potenc)?

V preglednici *A* je kub le 1 in bikvadrat tudi samo 1. Če preglednico nadaljujemo brez kraja, nikdar več ne srečamo kuba ali bikvadrata. O tem govori trditev, ki jo je izrekel Fermat (1601 – 1665):

Nobeno trikotniško število, ki je večje od 1, ni kub ali bikvadrat naravnega števila.

Kako je Fermat svojo trditev utemeljil, ni znano. Prvič je trditev dokazana pri Eulerju. Zato drži, da enačba

$$n^2 + n = 2m^3$$

v naravnih številih nima druge rešitve kot $n = m = 1$. Isto velja za enačbo

$$n^2 + n = 2m^4$$

Razlika

$$t_{n+1} - t_n = n + 1$$

pove, da med t_n in t_{n+1} leži n naravnih števil. Zato zmeraj redkeje srečamo trikotniška števila, ko se pomikamo k vedno večjim naravnim številom. To kaže tudi spodnja preglednica *B*. V njej je za nekatere n navedeno, koliko je trikotniških števil do n.

n	število trikotniških števil do n
100	**13**
200	**19**
300	**24**
400	**27**
500	**31**
600	**34**
700	**36**
800	**39**
900	**41**
1000	**44**
10000	**140**
100000	**446**
1000000	**1413**
2000000	**1999**
3000000	**2448**

Preglednica *B*

Iz preglednice preberemo, da je do milijona 1413 trikotniških števil. Ko gremo od milijona do dveh milijonov, naletimo na 586 trikotniških števil. Od dveh do treh milijonov leži 449 trikotniških števil. Ko postane n dovolj velik, seveda med n in $n + 1000000$ ni nobenega trikotniškega števila več. Podobno za vsako naravno število d, med n in $n + d$ ni trikotniških števil, če je le n zadosti velik.

Videli smo, da so trikotniška števila redka. Kljub temu se z njimi naravna števila preprosto izražajo. Tudi to njihovo lastnost je zapazil Fermat, ko je zatrdil:

Vsako naravno število se da pisati kot vsota enega, dveh ali največ treh trikotniških števil.