PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **14** (1986/1987)
Številka 1
Strani 8–11

Jože Andrej Čibej in Ciril Velkovrh:

OBRESTNO OBRESTNI RAČUN

Ključne besede: matematika, gospodarska matematika, obrestni račun, obrestno obrestni račun, posojila.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/14/800-Cibej.pdf

OBRESTNO OBRESTNI RAČUN

V tem prispevku se bomo še enkrat lotili vračanja (dolgoročnih) posojil, torej problema, s katerim se je bralec Preseka lahko seznanil v članku Bojana Moharja *O posojilih* (Presek 13 (1985/86) 20–23). Oznake, ki jih bomo uporabljali za posamezne količine, so takšne, kot jih običajno srečamo v poslovni praksi in učbenikih finančne matematike. Upamo, da bo bralec kljub temu brez težav primerjal rezultate omenjenega in našega članka.

Banka za krajša obdobja, katerih dolžina ne presega *kapitalizacijskega obdobja* (to je časa, ki preteče med dvema zaporednima pripisoma obresti), obračunava obresti po načelih *navadnega obrestnega računa:* osnova za izračun obresti je začetni izposojeni ali vloženi znesek, ali drugače, *začetna glavnica G.* Take obresti so premo sorazmerne

a) višini glavnice G
b) času obrestovanja n
c) obrestni meri p

Če se omejimo na najpreprostejši primer, ko je kapitalizacijsko obdobje eno leto, lahko rečemo, da nam obrestna mera pove, koliko dinarjev obresti dobimo od vsakih 100 din vložene glavnice. Letne obresti o so tako določene z obrazcem

$$o = \frac{G.p}{100} \tag{1}$$

kjer G pomeni začetno glavnico, p pa obrestno mero, ki jo vedno izražamo v odstotkih. Po dogovoru o premi sorazmernosti obresti s časom obrestovanja so obresti za 1 dan 365-krat (ali 366-krat, če gre za prestopno leto) manjše od letnih, obresti za d dni pa d-krat večje kot za en dan, tako da dobimo v primeru, ko je čas obrestovanja izražen v dnevih, namesto (1) obrazec

$$o = \frac{G\,p\,d}{36500} \tag{2}$$

Podobno lahko sam premisliš, kako pridemo do obrazca

$$o = \frac{G\,p\,m}{1200} \tag{3}$$

za primer, ko se glavnica G pri obrestni meri p% obrestuje m mesecev. S pomočjo obrazca (3) lahko za vajo izračunamo, koliko se nam do konca leta nabere v banki, če pri obrestni meri $p\%$ vsak mesec vložimo a dinarjev. B. Mohar je nalogo – čeprav tega ni posebej poudaril – rešil za primer, ko te zneske vlagamo ob koncu vsakega meseca:

$$A = a + \frac{a.\,p.\ 11}{1200} + a + \frac{a.\,p.\ 10}{1200} + \ldots + a + \frac{a.\,p.\ 1}{1200} + a =$$

$$= 12a + \frac{a.\,p}{1200}\,(11+10+\ldots+2+1) = \frac{a\,(14400 + 66\,p)}{1200} \qquad (4)$$

Iz oblike (4), ki jo običajno srečamo v učbenikih, dobimo s krajšanjem obrazec $A = a(12 + 11p/200)$, ki se od Moharjevega razlikuje samo po tem, da je pri njem obrestna mera že izražena kot $p/100$ in ima zato pri njem obrazec obliko $A = a(12 + 11p/2)$. Za vajo lahko izpeljeŠ obrazec za skupno letno vrednost mesečnih vlog, ki jih vplačujemo na začetku meseca. Ugotovil boš, da je v tem primeru

$$A = \frac{a\,(14400 + 78\,p)}{1200} = a\,(12 + 13\,p\ /\ 200)$$

Popolnoma drugačen pa je obračun obresti za obdobja, ki so daljša od enega leta (ali splošneje, daljša od enega kapitalizacijskega obdobja). V tem primeru se obresti za posamezno obdobje pripisujejo prvotni glavnici in se v naslednjem obdobju obrestujejo poleg glavnice tudi obresti iz preteklega obdobja; rečemo, da se obresti *kapitalizirajo*. Če začenmo z glavnico G, imamo po enem letu

$$G_1 = G + \frac{G.p}{100} = G(1 + \frac{p}{100}) \qquad (5)$$

Izraz $1 + p/100$, ki se pojavlja v (5), je v finančni matematiki tako pogost, da si je prislužil poseben simbol,

$$k = 1 + \frac{p}{100} \qquad (6)$$

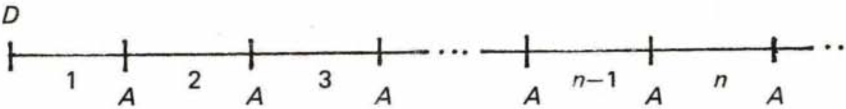
in posebno ime, imenujemo ga *obrestovalni faktor*. Tako v skladu s (5) velja $G_1 = G.k$. V naslednjem letu se obrestuje tako povečani znesek, zato je glavnica po dveh letih enaka

$$G_2 = G_1 + \frac{G_1.\,p}{100} = G_1\,(1 + \frac{p}{100}) = G_1.\,k = (G.k).\,k = G\,k^2$$

Nadaljevanje tega premisleka (glej Moharjev članek, str. 21) nas pripelje do osnovnega obrazca obrestno obrestnega računa, ki nam pove, kolikšna je glavnica po n kapitalizacijskih obdobjih (letih):

$$G_n = G.k^n \quad \text{ali} \quad G = G_n / k^n \tag{7}$$

Višino glavnice po n letih dobimo torej tako, da jo množimo z n-to potenco obrestovalnega faktorja, vrednost pred n leti pa tako, da jo delimo s to potenco. S tem pravilom smo opisali postopek, ki mu v finančni matematiki običajno rečemo *preračunavanje glavnice* na kasnejši oziroma zgodnejši trenutek (ali s tujko "termin"). Kadar imamo opraviti z več kot eno glavnico, si dinamiko vplačil in izplačil običajno prikažemo na številski premici, na kateri z enako dolgimi intervali označimo posamezna kapitalizacijska obdobja in označimo, ob katerih trenutkih vplačujemo ali dvigamo posamezne glavnice. (Strokovno rečemo, da označimo, kdaj te glavnice *dospevajo.)* Kot primer za uporabo tega dogovora najprej izračunajmo višino letne anuitete★, ki jo moramo plačevati, če želimo dolg D dinarjev vrniti v n letih, pri čemer prvi obrok dospeva eno leto po najemu kredita.



Ker lahko neposredno primerjamo samo glavnici, ki dospevata v istem trenutku, moramo vse te zneske preračunati na isti trenutek, najlažje na tisti čas, ko dospeva zadnja anuiteta. Takratna vrednost začetnega dolga D je Dk^n, saj dospeva zadnja anuiteta n let kasneje kot začetni dolg. Vrednosti posameznih anuitet (od zadnje proti prvi) pa so $A, Ak, Ak^2, \ldots, Ak^{n-1}$, zato je

$$Dk^n = A(1 + k + k^2 + \ldots + k^{n-1}) \tag{8}$$

Kot je pokazano v Moharjevem članku, lahko vsoto na desni poenostavimo v $A(k^n - 1)/(k - 1)$

$$Dk^n = A \frac{k^n - 1}{k - 1} \tag{9}$$

★ Izraz "anuiteta" pride iz besede "anno", ki pomeni leto, anuiteta torej "letni obrok". Ker pa se je izraz uveljavil tudi za polletne, mesečne ... obroke, posebej poudarimo, da gre za letne obroke.

in končno

$$A = \frac{Dk^n(k-1)}{k^n - 1} \tag{10}$$

Strah, da takšna formula pri $p = 0$ ne velja, je odveč. Vedno se namreč lahko vrnemo na obliko, ki sledi iz (8),

$$A = \frac{Dk^n}{1 + k + k^2 + ... + k^{n-1}}$$

Pri $p = 0$ je obrestovalni faktor k enak 1 in za anuiteto A dobimo

$$A = \frac{D.1}{1 + 1 + ... + 1} = \frac{D}{n} \tag{11}$$

Pri brezobrestnem posojilu je torej anuiteta kar obratno sorazmerna številu obrokov (in premo sorazmerna začetnemu dolgu).

Iz letne anuitete A, določene z obrazcem (10), lahko z razrešitvijo obrazca (4) izračunamo potrebni mesečni obrok, ki nam ob plačevanju dvanajstih takih obrokov ob koncu posameznega meseca do konca leta zbere natanko A dinarjev. Tako bi bil v obravnavanem primeru mesečni obrok enak

$$a = \frac{1200\,A}{14400 + 66p} = \frac{1200\,D\,k^n\,(k-1)}{(14400 + 66p)\;\;(k^n - 1)} \tag{12}$$

Navadno so bile pri bančnih posojilih podane letne obrestne mere. Pri polletnih anuitetah so polletne obrestne mere točno polovico manjše, pri mesečnih obrokih dvanajstkrat manjše, pri dvoletnih pa dvakrat večje. Praktično so banke do leta 1980 pri mesečnih odplačevanjih dolgov polletne anuitete razdelile na 6 enakih mesečnih obrokov, ki pa se v tem intervalu niso obrestovali. Ali so bile tu banke nepoštene ali pa so bili le posojilojemalci na škodi? O nepoštenosti ne moremo govoriti, če se denarni zavodi držijo dogovorjenega poslovanja. Rekli bi lahko le, da je za občane škoda, ker posojilne pogoje določa le banka. To pa ne drži vedno, vsaj ne v primeru, ki ga Bojan Mohar navaja na začetku svojega članka. Pri stanovanjskih kreditih so pogoji ugodnejši: za 15-letno posojilo in 5% obrestno mero. Ali ni to ob 80% inflacijski stopnji skoraj zastonj? Prav zaradi tega pa so banke pričele vplačane anuitete obrestovati vsak mesec. Tako je tudi pri podatkih, ki jih je Bojan Mohar dobil pri znancu, vse v najlepšem redu:

$D = 800.000.–$ din
$p = 5\%, k = 1{,}05$
$n = 15$ let oziroma $n_1 = 180$ mesečnih odplačil, pri čemer je
$p_1 = 5/12\ \% = 0{,}0041\dot{6}$ oziroma $k_1 = 1{,}0041\dot{6}$.

Mesečni obrok a_1 izračunamo takole

$$a_1 = \frac{D.k_1^{180} . (k_1 - 1)}{k_1^{180} - 1} = \frac{800.000 . 1{,}0041\dot{6}^{180} . 0{,}0041\dot{6}}{1{,}0041\dot{6}^{180} - 1} =$$

$$= \frac{800.000 . 2{,}1137014 . 0{,}0041\dot{6}}{1{,}1137014} = 6326{,}25$$

Razlika do 6327.– din pa nastane zato, ker banka vse končne zneske zaokroži navzgor.

Zanimivo je še vedeti, kakšne so letne anuitete za ta primer.

$$a = \frac{D.k^{15} . (k-1)}{k^{15} - 1} = \frac{800.000 . 1{,}05^{15} . 0{,}05}{1{,}05^{15} - 1} =$$

$$= \frac{800.000 . 2{,}0789282 . 0{,}05}{1{,}0789282} = 77073{,}83$$

kar je za 1159.– din več kot 12 mesečnih anuitet.

Za konec bomo skušali odgovoriti še na tri zastavljena vprašanja v omenjenem članku iz P–XIII/1.

(1) Ali so možne take obresti, da bo (mesečni) obrok pri odplačevanju na pet let manjši kot obrok pri odplačevanju na 10 let? Pri tej nalogi upoštevamo, da so v obeh primerih obrestne mere enake. Zato lahko zapišemo

$$\frac{D.k^5 . (k-1)}{k^5 - 1} < \frac{D . k^{10} . (k-1)}{k^{10} - 1}$$

Ker so $D > 0, p > 0,$ $k - 1 > 0$ in $k > 1$, lahko obe strani enačbe krajšamo z D, k^5, $(k-1)$ in $(k^5 - 1)$ ter dobimo

$$k^5 + 1 < k^5$$
$$1 < 0$$

kar pa ni možno.

(2) Kolikšna je dejanska vrednost odplačanega denarja v primerjavi z višino posojila, če upoštevaš , da se vrednost zmanjšuje z inflacijo, ki je, recimo, vsa leta odplačevanja enaka 80%? Kako se spreminja vrednost denarja pri inflaciji, si oglejmo, kar bo lažje, pri 100%? To pomeni, da bo današnji znesek 200.- din čez leto dni vreden le še 100.– din. Če zaznamujemo inflacijsko stopnjo z $r =$ $= 100$ %, je inflacijski faktor $I = 1 + r/100 = 2$. Današnjo vrednost zneska a_0 dobimo tako, da vrednost čez eno leto a_1 pomnožimo z inflacijskim faktorjem, kar lahko zapišemo tudi obratno

$$a_1 = a_0 \cdot \frac{1}{I} \tag{13}$$

Če upoštevamo, da z enim letom znesek ne samo izgubi na vrednosti, pač pa tudi pridobi zaradi obresti, moramo ta znesek pomnožiti še z obrestovalnim faktorjem k. Obrazec

$$a_1 = a_0 \cdot \frac{1}{I} \cdot k = a_0 \cdot \frac{k}{I}$$

lahko zapišemo tudi takole

$$a_1 = a_0 . m, \text{ kjer je } m = \frac{k}{I} = \frac{1+p}{1+r} \tag{14}$$

Vsi drugi obrazci z upoštevanjem inflacije so enaki obrazcem za obrestno obrestni račun, le da je obrestovalni faktor zapisan malo bolj komplicirano:

$$G_n = G.m^n \text{ in } A_n = a\,\frac{m^n - 1}{m - 1} \tag{15}$$

(3) Ali se lahko zgodi, da bo pri posojilu na n let mesečni obrok višji od celotnega posojila? Kaj hitro lahko opazimo, da so lahko obroki (ne le mesečni) večji od celotnega posojila. V tem primeru je vrednost ulomka

$$\frac{a}{D} = \frac{k^n\,(k-1)}{k^n - 1} > 1$$

kar smo dobili iz formule (5). Oglejmo si to neenačbo za različna obdobja.

a) Za enoletna posojila ($n = 1$) se neenačba

$$\frac{k_1{}^n . (k_1 - 1)}{k_1{}^n - 1} > 1 \text{ glasi } \frac{k_1 . (k_1 - 1)}{k_1 - 1} > 1$$