PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **13** (1985/1986)
Številka 1
Strani 20–23

Bojan Mohar:

O POSOJILIH

Ključne besede: matematika, srednješolska matematika, uporabna matematika, obrestno-obrestni račun.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/13/747-Mohar.pdf

O POSOJILIH

V času, ko je naša dežela vse bolj zadolžena, je zelo pomembno vedeti tudi kaj o posojilih. Zato si oglejmo, kako lahko izračunamo višino mesečne anuitete najetega kredita. Če morda še ne veš, *anuiteta* je znesek, ki ga moraš plačati vsak mesec, da v dogovorjenem roku vrneš posojilo.

Na banki lahko dobimo na primer posojilo, ki ga bomo odplačevali 5 let, obresti pa bodo 50% letno. Za nakup stanovanj pa so krediti ugodnejši: 15 let in 5%. Kolikšna bo mesečna anuiteta za vsakega od kreditov, če posojilo znaša 10000,00 din?

Da bo računanje lažje, bomo vpeljali naslednje oznake:

n . . . . višina posojila (din)
d . . . . doba odplačevanja (let)
p . . . . obrestna mera
(npr. $p = 0.05$ za 5% obr. mero)
a . . . . mesečna anuiteta (neznano)

Omeniti moramo, da se obresti zaračunajo vsako leto enkrat in da se odplačani znesek ne obrestuje več. Z vsakim mesecem je torej znesek dolga za a manjši, na koncu vsakega leta pa se k odplačanemu znesku dodajajo obresti.

Za rešitev problema je ugodno razmišljati malo drugače. Banka nam je posodila znesek n din. Ta znesek bomo odplačevali d let. Če ga ne bi odplačevali sproti, bi morali zaradi obresti plačati znesek n + obresti v d letih. Koliko znesejo te obresti, bomo izračunali kasneje. Po drugi strani pa plačujemo mesečne obroke in si lahko mislimo, da jih nalagamo na posebno (svojo) hranilno knjižico ali bančni račun, kjer se nam obrestujejo po obrestni meri, ki velja za posojilo. Namesto da bi upoštevali, da smo banki vsak mesec dolžni manj (in nam banka ne bo več zaračunavala obresti za ta znesek), imamo znesek na naši knjižici. Zanj dobimo ravno toliko obresti, kot jih moramo plačati banki. Sklepamo torej lahko takole: d let mesečno nakazujemo po a dinarjev na poseben račun. Banka ga bo obrestovala po meri p. Končni znesek mora biti enak n plus obresti v d letih.

Oglejmo si sedaj, kako se posojilo n obrestuje z leti. Po prvem letu k znesku prištejemo enoletne obresti $p.n$ dinarjev in imamo tako skupaj $n + pn =$

$= n(1 + p)$ dinarjev. V drugem letu se obrestuje že novi znesek, zato je za $p.n.(1 + p)$ obresti in skupna vsota se poveča na $(n.(1 + p)).(1 + p) = n(1 + p)^2$. Ravno tako vidimo, da je po treh letih vsota enaka $n(1 + p)^3$ itd. Znesek se po d letih poveča na $n(1 + p)^d$.

Kaj pa je z odplačevanjem? Prvi mesec vplačamo a dinarjev in ta vsota se nam bo obrestovala d let minus en mesec. Drugi obrok se nam bo obrestoval dva meseca manj kot d let itd. V d letih odplačevanja bomo na "našem računu" nabrali skupaj naslednjo vsoto:

$$
\begin{gathered}
a + \text{obresti za } (d - 1/12) \text{ let} + \\
+ a + \text{obresti za } (d - 2/12) \text{ let} + \\
+ a + \text{obresti za } (d - 3/12) \text{ let} + \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
+ a + \text{obresti za } (d - 12d/12) \text{ let}
\end{gathered}
$$

Skupaj bomo torej vplačali $12d$ mesečnih obrokov po a dinarjev in zanje dobili tudi nekaj obresti. Koliko bo teh obresti, bo najteže izračunati.

Najprej poglejmo, koliko dobimo pri odplačevanju v enem letu:

$$
\begin{gathered}
\text{od prvega obroka: } a + a.p.\ 11/12 = a(1 + 11p/12) \\
\text{od drugega obroka: } a + a.p.\ 10/12 = a(1 + 10p/12) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\text{od enajstega obroka: } a + a.p.\ 1/12 = a(1 + p/12) \\
\text{od dvanajstega obroka: } a = a(1 + 0p/12)
\end{gathered}
$$

Skupno dobimo:

$$
\begin{gathered}
A_1 = a(1 + 11p/12) + \dots + a(1 + 0p/12) = \\
= a\,[\,12 + p(11 + 10 + \dots + 1)/12\,] = a\,[\,12 + p.11.12/24] = \\
= a\,[\,12 + 11p/2\,]
\end{gathered}
$$

Znesek A_1 se nam bo obrestoval še $d - 1$ leto, zato bomo od njega dobili skupno:

$$B_1 = A_1.(1 + p)^{d-1}$$

V drugem letu ravno tako "odplačamo" A_1 dinarjev, ki se nam potem obrestujejo celih $d - 2$ let. Torej dobimo zanje:

$$B_2 = A_1.(1 + p)^{d-2}$$

dinarjev. Podobno dobimo iz obrokov tretjega leta skupno

$$B_3 = A_1 .(1+p)^{d-3} \text{ dinarjev itd.}$$

V vseh d letih odplačevanja pa zberemo:

$$\begin{aligned} A &= A_1(1+p)^{d-1} + A_1(1+p)^{d-2} + \ldots + A_1(1+p) + A_1 = \\ &= A_1 \left[(1+p)^{d-1} + (1+p)^{d-2} + \ldots + (1+p) + 1\right] = \\ &= A_1 . \left[(1+p)^d - 1\right]/\left[(1+p) - 1\right] = a(12 + 11p/2).\left[(1+p)^d - 1\right]/p \end{aligned}$$

Kako smo izračunali vsoto iz oglatega oklepaja v gornji formuli?

Ker je $(x^d - 1) = (x-1)(x^{d-1} + x^{d-2} + \ldots + x + 1)$, sledi $x^{d-1} + x^{d-2} + \ldots + x + 1 = (x^d - 1)/(x-1)$, kar je uporabljeno zgoraj za $x = 1 + p$.

Ta formula ne velja za $x = 1$ (to je $p = 0$). Zakaj misliš, da je tako?

Zdaj smo že pri koncu. Odplačano mora biti enako dobljenemu posojilu, povečanemu za obresti:

$$a.(12 + 11p/2)\left[(1+p)^d - 1\right]/p = n.(1+p)^d$$

in

$$a = n.(1+p)^d . \, p / \left[((1+p)^d - 1)(12 + 11p/2)\right] \tag{1}$$

Ko sem izpeljal formulo (1), sem jo seveda takoj preizkusil na primeru. Pri nakupu pohištva sem najel potrošniški kredit v višini 92000 din z dobo odplačevanja 5 let in 25% obrestno mero. Na ta račun mesečno plačujem 2851 din. In glej ga zlomka! Ogoljufali so me! Prav gotovo, saj po formuli (1) dobim mesečno anuiteto 2558 din. V petih letih bom torej plačal 12.5.(2851–2558)= = 17580 preveč.

Kaj je narobe? Vse skupaj sem še enkrat preveril na podatkih za nek drug kredit in tudi to se ni ujemalo. Očitno je nekaj narobe z našo formulo. Po krajšem poizvedovanju sem izvedel, da kredite odplačujemo z letnimi in ne mesečnimi anuitetami. To pomeni, da se 12 mesečnih obrokov za letno anuiteto ne začne obrestovati z mesecem plačila, ampak šele ob poteku leta, ko smo torej vplačali že vseh 12 obrokov letne anuitete. V gornji izpeljavi je torej vse v redu, le znesek A_1, ki ga dobimo pri odplačevanju v enem letu, je enak $12a$ in ne $(12 + 11p/2)a$. Od tod pa izračunamo mesečno anuiteto:

$$a = \frac{n.p.(1+p)^d}{12. \left[(1+p)^d - 1\right]} \tag{2}$$