PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **13** (1985/1986)
Številka 2
Strani 66–69

Ivan Vidav:

# O ŠTEVILU 13

Ključne besede: matematika, teorija števil, praštevila, kongruentna števila.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/13/13-2-Vidav.pdf

# O ŠTEVILU 13

Vsi dobro vemo, da je 13 nesrečno število. (Morda pa prinaša nesrečo le številka 13?) Pa poglejmo na to število z matematičnimi očali. Poskušajmo z matematično analizo ugotoviti, kaj je tako zloveščega in neprijaznega na njem.

Takoj vidimo, da je 13 praštevilo: deljivo je samo z 1 in samim seboj. Sodi med tista praštevila, ki jih lahko zapišemo kot vsoto dveh kvadratov

$$13 = 2^2 + 3^2$$

Manjša praštevila so 2, 3, 5, 7 in 11. Med njimi sta 2 in 5 vsoti dveh kvadratov

$$2 = 1^2 + 1^2, \qquad 5 = 1^2 + 2^2$$

Nikakor pa ne moremo zapisati praštevil 3, 7 in 11 v tej obliki. 11 je vsota treh kvadratov: $11 = 1^2 + 1^2 + 3^2$. Praštevilo 7 pa se ne da izraziti niti s tremi kvadrati temveč le s štirimi: $7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$.

Vsako naravno število, naj bo praštevilo ali sestavljeno, se da zapisati kot vsota štirih ali manj kvadratov. Nekatera števila so že sama kvadrati, npr. 4, 9, 16. Med njimi seveda ni praštevil. Nekatera se dajo izraziti kot vsota dveh, zopet druga kot vsota treh kvadratov. V najslabšem primeru potrebujemo štiri kvadrate.

Katera praštevila so vsote dveh kvadratov? Praštevilo $p$ delimo s 4. Ker so razen števila 2 vsa praštevila liha, je ostanek pri delitvi lahko le 1 ali 3. Če dobimo ostanek 1, je $p$ vsota dveh kvadratov, če dobimo ostanek 3, $p$ ni vsota dveh kvadratov. Ker je $13 = 3.4 + 1$, je ostanek pri delitvi s 4 enak 1 in 13 je vsota dveh kvadratov. Prav tako je praštevilo $17 = 4.4 + 1$ vsota dveh kvadratov: $17 = 1^2 + 4^2$.

Katera praštevila $p$ pa se dajo izraziti z vsoto treh kvadratov? Takole ugotovimo: Delimo $p$ z 8. Ostanek pri delitvi je zdaj lahko 1, 3, 5 ali 7. Če je ostanek 3, se $p$ izraža z vsoto treh kvadratov. Zgled: $19 = 2.8 + 3$ in zato je 19 vsota treh kvadratov $1^2 + 3^2 + 3^2$. Če pa je ostanek pri delitvi 7, se da $p$ izraziti le z vsoto 4 kvadratov. Ker je $71 = 8.8 + 7$, lahko zapišemo 71 kot vsoto štirih kvadratov $1^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2$, nikakor pa ne kot vsoto treh ali dveh kvadratov. Kaj pa ostanka 1 in 5? Bralec naj se sam prepriča, da dobimo pri delitvi z 8 ostanek 1 ali 5 natanko tedaj, ko dobimo pri delitvi s 4 ostanek 1.

Torej pri ostankih 1 in 5 je praštevilo $p$ vsota dveh kvadratov.

Naj bo $D$ naravno število, ki ni kvadrat. Oglejmo si enačbo

$$x^2 - Dy^2 = -1 \tag{1}$$

Zanimajo nas rešitve, kjer sta $x$ in $y$ celi števili. Pri $D = 2$ ima enačba $x^2 - 2y^2 = -1$ rešitev $x = 1$, $y = 1$. Zaman pa bi se trudili, če bi iskali rešitev enačbe $x^2 - 3y^2 = -1$ v celih številih. Take rešitve ni. Izraz $x^2 - 3y^2 + 1$ pri celih številih $x$ in $y$ namreč nikoli ni enak 0. O tem se prepričamo, če delimo število $x$ s 3. Naj bo kvocient pri tej delitvi $q$. Ostanek pa je lahko 0 (delitev se izide), 1 ali 2. V prvem primeru je $x = 3q$, v drugem $x = 3q + 1$ in v tretjem $x = 3q + 2$. V prvem primeru dobimo $x^2 - 3y^2 + 1 = 9q^2 - 3y^2 + 1$. To število da pri delitvi s 3 ostanek 1 in zato ni enako 0. Podobno obravnavamo primera $x = 3q + 1$ in $x = 3q + 2$. To naj opravi bralec sam in se tako prepriča, da tudi v teh dveh primerih izraz $x^2 - 3y^2 + 1$ ni enak 0.

Pri $D = 13$ je enačba

$$x^2 - 13y^2 = -1 \tag{2}$$

rešljiva. Zadoščata ji števili $x = 18$, $y = 5$. Ta rešitev ni edina. Velja namreč tole: Če ima enačba (1) rešitev $x = a$, $y = b$, je njena nadaljnja rešitev

$$x = a^3 + 3ab^2 D, \qquad y = 3a^2 b + b^3 D \tag{3}$$

Bralec naj se sam prepriča o tem s preskusom! Torej ima (2) tudi rešitev

$$x = 23382, \qquad y = 6485$$

Če izhajamo iz te rešitve, dobimo po formuli (3) spet novo rešitev. Zato je rešitev neskončno.

Rešljivost enačbe (2) je posledica dejstva, da je 13 vsota dveh kvadratov. Če je namreč $D$ praštevilo $p$, ima enačba (1) rešitev v celih številih $x, y$ natanko tedaj, ko je $p$ vsota dveh kvadratov.

Naj omenim, da je podobna enačba

$$x^2 - Dy^2 = 1 \tag{4}$$

vselej rešljiva v celih številih. Ima dve očitni (trivialni) rešitvi $x = 1$, $y = 0$ in $x = -1$, $y = 0$. Če $D$ ni kvadrat, pa ima (4) poleg teh dveh še nešteto drugih rešitev. Bralec naj s preskusom dokaže tole: Če je $x = a$, $y = b$ rešitev enačbe (1), potem je

$$x = a^2 + b^2 D, \qquad y = 2ab \tag{5}$$

rešitev enačbe (4).

*Popolno število* imenujemo naravno število $m$, ki je enako vsoti svojih pravih deliteljev. Pravi delitelji so vsi delitelji števila $m$, ki so manjši od $m$. Najmanjše popolno število je 6. Njegovi pravi delitelji so 1, 2 in 3 z vsoto $1 + 2 + 3 = 6$. Seveda ni nobeno praštevilo $p$ popolno, saj ima $p$ en sam pravi delitelj, namreč 1. Zato tudi 13 ni popolno število. Naslednje popolno število je 28. Njegovi delitelji so 1, 2, 4, 7, 14 z vsoto $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.

Praštevilo $p$ je *Fermatovo,* če razlika $p - 1$ ni deljiva z nobenim drugim prafaktorjem kakor z 2. Torej je $p - 1$ potenca od 2, npr. $p - 1 = 2^n$ in od tod $p = 2^n + 1$. Izkaže se, da je $2^n + 1$ praštevilo kvečjemu tedaj, ko je tudi eksponent $n$ potenca od 2. 13 ni Fermatovo praštevilo, saj je razlika $13 - 1 = 12$ deljiva s prafaktorjema 2 in 3. Pač pa so $3 = 2^1 + 1$, $5 = 2^2 + 1$, $17 = 2^4 + 1$ Fermatova praštevila.

Fermatova praštevila so slavna zaradi povezave s konstrukcijo pravilnih mnogokotnikov. Gauss je namreč dokazal, da se da pravilni mnogokotnik s $p$ stranicami, kjer je $p$ praštevilo, narisati z ravnilom in šestilom natanko takrat, ko je $p$ Fermatovo praštevilo. Zato lahko narišemo pravilni petkotnik in sedemnajstkotnik. Pravilnega trinajstkotnika pa prav tako kakor pravilnega sedemkotnika in enajstkotnika ne moremo narisati samo z ravnilom in šestilom.

Naravna števila $a, b, c$ sestavljajo pitagorejsko trojico, če je med njimi zveza $a^2 + b^2 = c^2$. Tedaj sta $a$ in $b$ kateti, $c$ pa hipotenuza pravokotnega trikotnika. Od davnega je npr. znana trojica 3, 4, 5. Ploščina pravokotnega trikotnika s katetama $a$ in $b$ je enaka $p = \frac{1}{2} ab$. V vsaki pitagorejski trojici $a, b, c$ je vsaj ena od katet $a, b$ sodo število. Zato je ploščina takega trikotnika zmerom celo število, npr. $p = 6$ za trikotnik s stranicami 3, 4, 5. Lahko pa se zgodi, da ima pravokotni trikotnik za ploščino celo število, čeprav njegove stranice niso cela, temveč le racionalna števila. Zgled za to je trikotnik s stranicami

$$a = \frac{3}{2}, \qquad b = \frac{20}{3}, \qquad c = \frac{41}{6}$$

Njegova ploščina $p = 5$.

Naravno število, ki je ploščina kakšnega pravokotnega trikotnika z racionalnimi stranicami, se imenuje *kongruentno število.* Pravkar smo videli, da sta 5 in 6 kongruentni števili. Dokazali so, da je 5 najmanjše kongruentno število; 1, 2, 3 in 4 namreč niso kongruentna števila. Torej ni pravokotnega trikotnika z racionalnimi stranicami, ki bi imel ploščino 1.

Če je $n$ kongruentno število, ne obstaja samo en pravokotni trikotnik z racionalnimi stranicami in ploščino $n$, temveč je takih trikotnikov nešteto. Tako ima npr. tudi trikotnik

$$a = \frac{7}{10} \qquad b = \frac{120}{7}, \qquad c = \frac{1201}{70}$$