MATEMATIKA

ŠTIRJE DOKAZI

Angleški matematik *W.Sowyer* je v svoji knjigi Prelude to Mathematics (Predigra matematike) zapisal zanimivo pedagoško misel:

"Često je koristneje, da rešimo eno samo nalogo na tri različne načine, kot pa da rešimo tri naloge na en način. Ko rešujemo isto nalogo na različne načine, jih lahko primerjamo, da ugotovimo, kateri je krajši, učinkovitejši in elegantnejši. Tako si pridobivamo in dograjujemo sposobnost za reševanje nalog."

Pokazali bomo štiri različne dokaze izreka:

Če sta diagonali trapeza medsebojno pravokotni, je vsota kvadratov teh diagonal enaka kvadratu vsote vzporednih stranic trapeza.

Dokaz 1. Na sliki 1 je trapez $ABCD$. Osnovnici AB in CD sta označeni z a in b, diagonali AC in BD sta e in f. Točki M in N sta sredini krakov, presečišča daljice MN z diagonalama smo označili E in F. Ker sta daljici ME in FN srednjici trikotnikov ACDin BCD, velja $ME = FN = \frac{1}{2}CD = b/2$. Od tod pa, ker je $MN = (a+b)/2$, dobimo

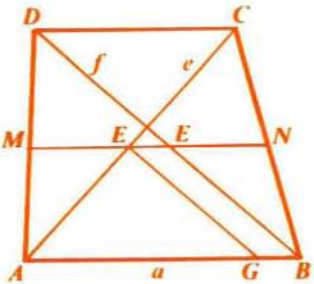
$$EF = MN - (ME + FN) = (a + b)/2 - b = (a-b)/2.$$

Konstruiramo EG vzporedno z BD. Ker je četverokotnik $BFEG$ paralelogram, je $EG = BF$. In ker MN razpolavlja diagonali trapeza, imamo $AE = e/2$ in $BF = f/2$ in zato $EG = f/2$. Hipotenuzo AG trikotnika AEG izračunamo: $AG = a - (a-b)/2 = (a+b)/2$. Uporabimo Pitagorov izrek v trikotniku AEG:

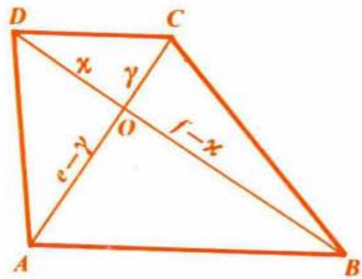
$$(e/2)^2 + (f/2)^2 = ((a+b)/2)^2$$

$$e^2 + f^2 = (a+b)^2$$

in dokaz je končan.



Slika 1



Slika 2

Dokaz 2. Poglejmo sliko 2. S črkama x in y smo označili daljici OD in OC in je zato $AO = e - y$ in $BO = f - x$, če sta e in f diagonali. Iz podobnosti trikotnikov ABO in CDO sklepamo, da velja sorazmerje

$$(e - y) : y = (f - x) : x = a : b$$

od koder izračunamo:

$$(a + b).y = b.e \tag{1}$$
$$(a + b).x = b.f \tag{2}$$

Enačbi (1) in (2) kvadriramo in seštejemo:

$$(a + b)^2(x^2 + y^2) = b^2.(e^2 + f^2) \tag{3}$$

Za pravokotni trikotnik CDO velja Pitagorov izrek:

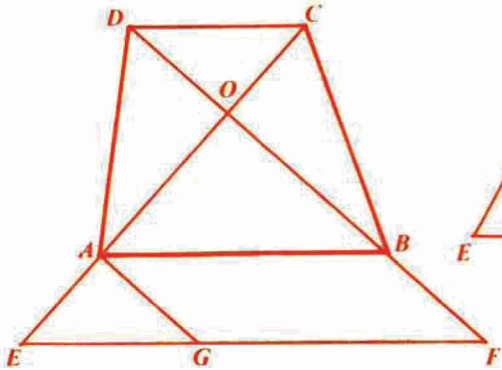
$$x^2 + y^2 = b^2 \tag{4}$$

Iz (3) in (4) sledi:

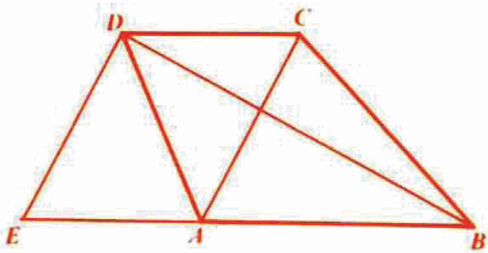
$$e^2 + f^2 = (a + b)^2$$

Dokaz 3. Diagonalo CA podaljšamo tako, da je daljica AE skladna z CO, in diagonalo DB podaljšamo do F tako, da je BF skladno z DO(slika 3). Vzporedno s podaljškom BF potegnemo še daljico AG. Četverokotnik $ABFG$ je paralelogram, zato je $FG = AB = a$. Trikotnika AEG in OCD sta skladna: $AE = OC$ po konstrukciji,

EAG = COD = 90° in AEG = OCD (kota z vzporednima krakoma). Skladnost nam prinese $EG = CD = b$. Torej je $EF = a + b$. Spet uporabimo Pitagorov izrek, tokrat za trikotnik EFO, in zahtevana enakost je pred nami.



Slika 3



Slika 4

Dokaz 4. Na sliki 4 smo konstruirali vzporednico DE diagonali AC. Ker je $AE = CD = b$, imamo $BE = AE + AB = b + a$. Trikotnik BDE je pravokoten in zato

$$e^2 + f^2 = (a+b)^2$$

Dragoljub M.Milošević
prevedel Peter Petek