PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **10** (1982/1983)
Številka 2
Strani 68–72

Dedomir Klinc:

VOŠČILNICA DEDKA MRAZA

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/10/10-2-Klinc.pdf

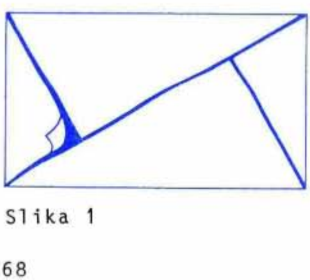
VOŠČILNICA DEDKA MRAZA

Pomislite, člani matematičnega krožka osnovne šole v Modri poljani so letos prejeli novoletno čestitko od samega dedka Mraza.

"Obilo zadovoljstva, sreče in uspehov ob odkrivanju in reševanju matematičnih problemov in ob vašem delu nasploh vam želi dedek Mraz," je pisalo v voščilnici.

Dedek Mraz pa seveda ne bi bil dedek Mraz, če ne bi voščilu priložil tudi darila. Svoje voščilo je namreč dedek Mraz v svečani pisavi, kot se njemu spodobi, zapisal na pravokoten list papirja, ki pa ga je tako umetelno prepognil, da je list postal kar sam sebi pisemska ovojnica.

Bila je to pisemska ovojnica pravokotne oblike, podobna pa vendar ne čisto taka, kot so tiste običajne. Odpirala se je namreč nekam bolj nenavadno, kar poglejte sliko 1!



Slika 1

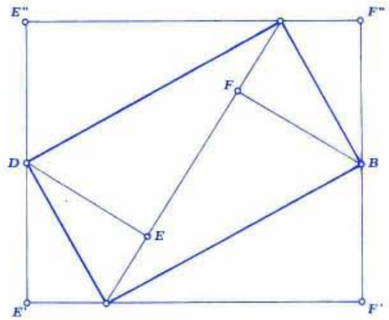
Sami vidite, bistrim očem krožkarjev iz Modre poljane pa tudi ni ušlo, da pravokoten list papirja, prepognjen v pravokotno pisemsko ovojnico, ne more biti le golo naključje. Tako prepognjena voščilnica je očitno nakazovala problem. In kaj naj bi tako navdušene raziskovalce, kot so krožkarji iz Modre poljane, bolj razveselilo, kot če jim kdo podari nov, še neobdelan problem, toliko bolj, če to stori sam dedek Mraz!

Prvo vprašanje, ki so si ga krožkarji po temeljitem ogledu voščilnice postavili, je bilo očitno: *kako neki je dedku Mrazu uspelo s samim prepogibanjem pravokotnega lista dobiti spet pravokotno ovojnico? In drugo: ali lahko kakršen koli pravokoten list, torej list, ki ima obliko pravokotnika z dolžinama stranic v poljubnem razmerju, prepognemo tako, da iz njega nastane ovojnica, ki tako zelo spominja na pisemsko?*

Vprašanja, predpostavke in ugotovitve so se porajale še in še, kar eno iz drugega je nastajalo. Da pa ne bi vsega le našteval in da bi ostalo nekaj raziskovalnega zadovoljstva tudi za vas, ki verjetno niste prejeli ravno takega pisma, poglejmo le, kako so si krožkarji iz Modre poljane organizirali delo.

Dobro veste, da nas je v vsaki delovni skupini vedno nekaj takih, ki najraje zagrabimo problem konkretno, ki smo, rekli bi, bolj eksperimentalno navdahnjeni. Ravno tako pa ima vsaka delovna skupina tudi nekaj takih članov, ki se nalog lotevajo raje s preudarkom, nekako bolj teoretično, za kar največkrat potrebujejo le papir in svinčnik. Uspešnost delovne skupine je seveda odvisna od sodelovanja prvih in drugih.

Pravzaprav sodelovanje med enimi in drugimi člani matematičnega krožka iz Modre poljane ob samem začetku, ko so se lotili problema voščilnice dedka Mraza, ni steklo tako idealno. Začetna zagnanost in nestrpnost, ki jo vsi dobro poznamo, ko prvič dojamemo problem, je bila kriva, da se je precej članov krožka lotilo prepogibanja papirja kar takoj. Zanesli so se pač na izkušnje, še bolj pa na občutek, in mogoče tudi na srečo, da bi že s samim prepogibanjem ugotovili pravilo, po katerem iz pravokotnega lista papirja dobiš pravokotno ovojnico. No in medtem ko se je kup pomečkanih listov pod klopjo večal, je skupina (sicer le na videz) bolj umerjenih raziskovalcev z risanjem skic ugotovila, da je omenjeni problem prepogibanja pravzaprav istoveten s problemom, *kako včrtati v dani pravokotnik nov pravokotnik tako, da bo le-ta imel vsa oglišča na stranicah prejšnjega (sl.2) in bo njegova ploščina polovica prejšnje.*



Slika 2

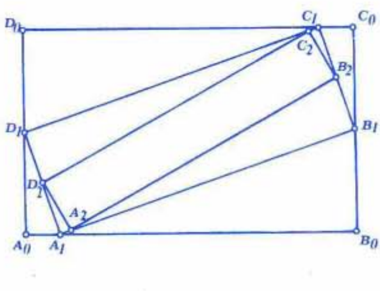
Ne vem, ali je bil vse bolj grozeči kup pomečkanih listov ali pa spoznanje, da brez sodelovanja vseh članov ne gre, vzrok, da so se krožkarji končno le lotili problema složno in na istem koncu. Naloge so opredelili nekako takole:

Poiskati pravilo, po katerem bomo z načrtovanjem že vnaprej določili robove pregibov lista v kuverto. Preveriti z dokazom, ali to pravilo velja za pravokotne liste kakršnih koli mer. Preveriti, ali je to edini možen način. Izdelati nekaj ovojnic. Preveriti, ali ob reševanju problema pridobljena spoznanja lahko uporabimo tudi v drugih okoliščinah. In končno, ali do tod rešen problem ne vodi še naprej k novim raziskovalnim možnostim in nalogam.

Povem vam še to, da so krožkarji iz Modre poljane zastavljene naloge kar zadovoljivo rešili. Kaj vse so ob tem novega stuhtali, sicer ne vem, bili pa so to učenci iz 6., 7. in 8. razredov. Znanje učencev 6. in 7. razreda, predvsem tisto o zrcaljenjih in o obodnih in središčnih kotih je za izdelavo ovojnice dedka Mraza kar zadostovalo. Učenci osmih razredov pa so v ovojnici verjetno našli še kaj imenitnejšega.

Prepričan sem, da bo izdelava ovojnice kaj hitro uspela tudi vam. Pa še kaj več! Če imate kaj delovnih, torej tovariških stikov z ostalimi matematičnimi krožki, jim lahko v taki ovojnici pošljete nalogo, ki ste jo na isto ali podobno temo stuhtali sami. Če pa gojite prijateljske stike celo s kakšnim srednješolskim krožkom, jim v ovojnici lahko pošljete recimo takle problem:

V pravokotnik z dolžinama stranic a_0, b_0 včrtamo nov pravokotnik tako, da njegova oglišča leže na stranicah prejšnjega (sl.3) in ima polovično ploščino. V včrtani pravokotnik (z dolžinama stranic a_1, b_1) po istem pravilu včrtamo naslednjega, v le-tega (a_2, b_2) včrtamo spet naslednjega (a_3, b_3) in tako nadaljujemo. Predstavljajmo si, da nadaljujemo z včrtovanjem pravokotnikov ne glede na čas, ki mineva, tudi tedaj, ko nam odpovedo že vsi, še tako ošiljeni svinčniki in še tako precizni drobnogledi. Z včrtovanjem vedno novega pravokotnika v pravokotnik nadaljujemo še v mislih in to kar naprej, v "neskončnost" bi rekli. Vprašamo se: ali ima to neskončno kak opazen konec? Je to točka, je to daljica, je to, za kar ne vemo še, kaj je, odvisno od tega, v kakšnem pravokotniku smo včrtovanje začeli?



Slika 3

$$\overline{A_0B_0} = \overline{C_0D_0} = a_0$$
$$\overline{B_0C_0} = \overline{D_0A_0} = b_0$$
$$\overline{A_1B_1} = \overline{C_1D_1} = a_1$$
$$\overline{B_1C_1} = \overline{D_1A_1} = b_1$$

$$\overline{A_nB_1} = \overline{C_nD_n} = a_n$$
$$\overline{B_nC_n} = \overline{D_nA_n} = b_n$$
$$\overline{A_{n+1}B_{n+1}} = \overline{C_{n+1}D_{n+1}} = a_{n+1}$$
$$\overline{B_{n+1}C_{n+1}} = \overline{D_{n+1}A_{n+1}} = b_{n+1}$$

Pa še: "Nikar se prezgodaj ne razjezite!" ne pozabite pripisati srednješolcem.